特集／ $\LaTeX 2_\varepsilon$ クラスファイル

# 非平衡と物性

## 特集記事用

辻　直人

### 1. はじめに

身の回りにある自然現象を思い浮かべてみよう．何が思い浮かぶだろうか．この本を手にとっている時にふと空を見上げて，雲が流れる様子を想像するかもしれない．あるいは突然雷鳴が轟き，天空で稲光を発する様子を思い浮かべるかもしれない．これらはすべて立派な物理現象だが，マクロに見て流れがあったり，密度や圧力といった巨視的な物理量が時々刻々と変化する．そのような状態は**非平衡状態**と呼ばれる．それに対して，マクロに見てそれ以上変化しないで落ち着いた状態のことを平衡状態という．

大学の学部で統計力学の授業を取るとまず習うのが後者である．平衡状態を理解する理論体系は確立しているのに対して，非平衡状態を平衡状態ほど包括的に理解する枠組みは整っていない．読者の中には物理を勉強し始めた頃に，世の中のほとんどの現象は非平衡なのだから，現代の物理の理論ではほとんどのことが理解できないのではないか！と思った経験がある人もいるかもしれない [*1)]．かく言う筆者もそのうちの一人である．逆に言えば，非平衡は多くの可能性が残されている物理のフロンティアといっても過言ではないだろう．

さて，本稿では非平衡と物性が紡ぎ出す世界の一端を紹介したい．非平衡と物性というだけでは文脈が広すぎるし，分野を網羅的に紹介するのは筆者の能力を超えている．必然的に筆者が触れている研究の話が中心になることをあらかじめ断っておく．

物性は物質の物理的性質を研究する学問である．ミクロに見て物質を構成しているのは原子であり，物質の電気的，磁気的性質を主に担っているのが多数の電子である．物質中で電子がたくさん集まることで，一個一個の電子を見ていただけでは想像もつかないマクロな現象が浮かびあがるのである．その一例が電気抵抗がゼロになる**超伝導**である (柳瀬氏の記事参照)．超伝導はある種の秩序を保った物質相であり，平衡状態・常圧下ではマイナス 135 度以下の極低温にまで物質を冷やさないと超伝導にならない [*2)]．

それではより高温の平衡状態から出発して，非平衡状態にすることで超伝導を発現させることはできるだろうか?もっと広く言えば，非平衡状態にすることで平衡状態では到達できなかった秩序相を実現することはできるだろうか？これはともすると直観に反する問いに聞こえる．なぜなら，非平衡にするということは，外から力を加えたり振動させたりすることで秩序を乱す方向に働くことが普通だからだ．逆方向に働かせて秩序を生み出すことは果たして不可能なのだろうか．

*1)　この感覚は物理を学ぶにつれて修正されることになる．平衡状態やその近傍を理解することで，驚くほど広く多彩な現象を説明することができるとわかるからである．

*2)　本稿を執筆中の 2018 年 8 月時点においてである．

## 2. **カピッツァの振り子**

物質中の電子の話に行く前に，一見全く異なる古典力学の話から始めてみたい．

伸び縮みしない棒の一端を固定し，もう一端に重りをつけた単振り子の運動を考えよう (図 1)．棒と鉛直方向のなす角を $\theta$，時間を $t$ とすると，振り子の運動方程式は以下のように表される．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g_0 \sin\theta \tag{1}$$

ここで $g_0$ はある定数である．振り子の振れ幅が十分小さいときは，振り子は周波数 $\omega_0 = \sqrt{g_0}$ で単振動する．

さて，この振り子の平衡状態は何だろうか．それは振り子が静止してそれ以上変化しない状態だから $d\theta/dt = 0$ を満たす点 (固定点) に限られる．式 (1) より $\sin\theta = 0$，つまり $\theta = n\pi$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) の点が対応する．これらのうち，安定した平衡状態として存在するのは重りが最低点にあるとき，つまり $\theta = 2n\pi$ の点である．重りが最高点にあるとき，つまり $\theta = (2n+1)\pi$ の点では，微小な摂動を加えるともとの位置からの変位がより増大していくために不安定である．このような不安定点は，安定した平衡状態として存在することができない．

次に，外部から力を加えて，振り子の支点を鉛直方向に周波数 $\omega$ で振動させて非平衡状態へ持っていくことを考えよう (図 2)．このような振り子のことを**カピッツァの振り子**と呼ぶ[1)]．運動方程式で表すと

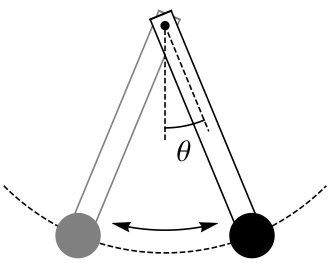


**図 1**　棒に重りがつながった振り子．

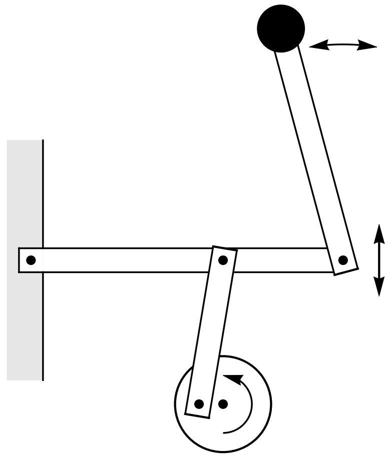

**図 2**　カピッツァの振り子．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(g_0 + g_1 \cos\omega t) \sin\theta \tag{2}$$

となる．ここで $g_0, g_1$ はある定数であり，$g_1 = 0$ とすると式 (1) に戻る．(2) の固定点は (1) と同じく $\theta = n\pi$ である．

外から加えた振動の周波数が十分大きいとき，より正確には $\omega \gg \omega_0 = \sqrt{g_0}$ のときに固定点の安定性がどう変わるかを見てみよう．周波数が大きいときには，振り子の運動は外力の振動に追随して速く振動する成分 $\xi(t)$ と，外力の振動に比べてゆっくりと変化する成分 $\varphi(t)$ とに分けて $\theta(t) = \varphi(t) + \xi(t)$ と書くことができる[2)]．$\xi(t)$ は振動成分なので外力の周期 $2\pi/\omega$ にわたって時間平均をとるとゼロになる．

$\xi$ が $\varphi$ に比べて十分小さいとして (2) を $\xi$ の 1 次まで展開しよう．速い成分と遅い成分で別々に等式を作っているはずだから，速い成分については

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g_1 \cos\omega t \sin\varphi \tag{3}$$

が成り立つ．(3) の右辺には本来 $\xi$ の 1 次の項もあるが，0 次の項に比べて十分小さいとして無視した．(3) の中で遅い成分 $\varphi$ は定数と見なして積分すると，

$$\xi = \frac{g_1}{\omega^2} \cos\omega t \sin\varphi \tag{4}$$

を得る．

一方，遅い成分については (2) で時間平均をとって $\xi$ や $\cos\omega t$ の 1 次の項を落とすと，

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g_0 \sin\varphi - g_1\overline{(\cos\omega t \cos\varphi)\xi} \quad (5)$$

を満たすことがわかる．上付き横線は速い振動の 1 周期にわたる時間平均を表す．(4) を代入して

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g_0 \sin\varphi - \frac{g_1^2}{2\omega^2}\sin\varphi\cos\varphi \quad (6)$$

を得る．これはまた，有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}(\varphi)$ を用いて

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}}{\partial\varphi} \quad (7)$$

の形に書き直すこともできる．ここで有効ポテンシャルは

$$V_{\mathrm{eff}} = -g_0\cos\varphi + \frac{g_1^2}{4\omega^2}\sin^2\varphi \quad (8)$$

で与えられる．振り子の平均的な運動は，外場によって変化したポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}$ に従って決まることになる．

$g_1$ をゼロから大きくしていくと，$g_1 = \sqrt{2g_0}\omega$ となったときに，点 $\varphi = (2n+1)\pi$ が不安定な固定点から安定な固定点に変わることがわかる (図 3)．これは，垂直に逆立ちした振り子が倒れずに安定して逆立ちの姿勢を保つことができるということを意味する！興味を持った読者は，インターネットで検索してカピッツァの振り子の実験動画を見てみるとよい．不思議なことに，外から振動を加えている間は逆立ちの状態から少し振り子の位置をずらしてもまた逆立ちの状態に安定して戻ってくることがわかる．非平衡では，平衡状態では決してできなかったような秩序立った状態を安定化させることができるのである．

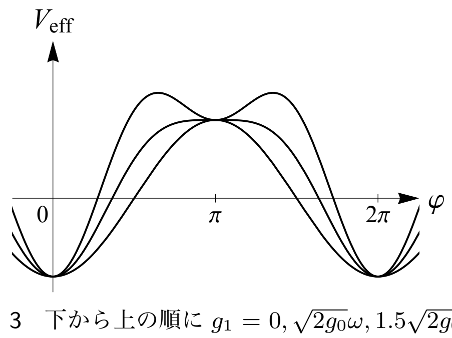


**図 3** 下から上の順に $g_1 = 0, \sqrt{2g_0}\omega, 1.5\sqrt{2g_0}\omega$ に対する有効ポテンシャル $V_{\mathrm{eff}}$ (8).

このように外力の振動の周波数が大きい場合に，その振動の効果が「静的な」ポテンシャルの変化として現れることがよくあり，非平衡による物性制御の基本的なアイディアの一つとなっている．

## 3. フロッケ理論

物質中の電子の話に戻ろう．前節の振り子の例と同じように，外から振動する外場を加えて多数の電子が示す性質を変えることはできるだろうか．

物質中で電子は量子力学にしたがって運動する．電子は電荷を持っているので，光 (電磁波) を当てることで振動する力を電子に加えることができる．光などの時間に依存する外場があるときに，電子の波動関数 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展はシュレディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \quad (9)$$

に従う．ここで $\hat{H}(t)$ はハミルトニアン演算子であり，プランク定数を $\hbar = 1$ とおいた．外場は周波数 $\omega$ で振動していて，ハミルトニアンが周期 $T = 2\pi/\omega$ の周期関数 ($\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$) になっているとする．前節にならって，外場の周波数 $\omega$ が大きい場合に速いモードと遅いモードが分離する状況を考えたい．

ここで，常微分方程式の一般論で出てくる**フロッケの定理**[3, 4] を思い出そう．$\phi(t)$ を $n$ 次元ベクトル，$X(t)$ を $n\times n$ 行列として，常微分方程式 $\frac{d}{dt}\phi(t) = X(t)\phi(t)$ を満たすとする．$X(t)$ が $t$ に関して周期的で $X(t+T) = X(t)$ となっているとき，ある可逆な周期行列 $P(t) = P(t+T)$ と $t$ に依存しない行列 $B$ が存在して，$\phi(t) = P(t)e^{(t-t_0)B}P(t_0)^{-1}\phi(t_0)$ と表せる．特に $P(t_0)^{-1}\phi(t_0)$ が $B$ の固有ベクトルとなるような初期条件 $\phi(t_0)$ を選ぶと，$B$ の固有値 $\lambda$ (フロッケ指数) と周期ベクトル $u(t) = u(t+T)$ を使って $\phi(t) = e^{\lambda t}u(t)$ と表せる．今は例として時間方向を考えているが，同様の結果は空間的に

周期的な場合に空間方向に対しても成り立ち，固体物理の文脈では**ブロッホの定理**として広く知られている．

このことを時間に周期的なハミルトニアンに対するシュレディンガー方程式 (9) に適用すると，その解は一般に

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{10}$$

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-i\hat{\Lambda}(t)}e^{-i(t-t_0)\hat{H}_F}e^{i\hat{\Lambda}(t_0)} \tag{11}$$

と表せることがわかる．ここで $\hat{\Lambda}(t)=\hat{\Lambda}(t+T)$ は時間に周期的な演算子であり，$\hat{H}_F$ は時間に依存しない演算子である．$\hat{H}_F$ を**フロッケハミルトニアン**，$e^{-i\hat{\Lambda}(t)}$ を微小運動演算子 (micromotion operator) と呼んだりする．(11) のように表すその心は，$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\hat{\Lambda}(t)}|\psi(t)\rangle$ と変換して外場の振動とともに動くフレームで波動関数を見ると，その時間発展は時間に依存しない有効ハミルトニアン $\hat{H}_F$ で決まっているということである．このようにして，波動関数の運動を，激しく振動する成分と振動しない成分に分離することができる．

外場の周波数 $\omega$ が大きい場合には，$\hat{H}_F$ と $\hat{\Lambda}(t)$ を $\omega^{-1}$ で展開して，逐次的に求めることができる．そのような高周波数展開にはいくつかの異なるアプローチが知られている[5,6] が，これは (11) で与えられる演算子の組 $\{\hat{H}_F, \hat{\Lambda}(t)\}$ に任意性があるためである．その任意性は一種の「ゲージの選び方の問題」であって，それらは適当な変換のもとでつながっていて，物理的な内容が変わるわけではない．特に，$\hat{H}_F$ の固有値 (擬エネルギーと呼ばれる) は演算子の組の選び方によらない．

一つの選び方として，境界条件 $\int_0^T dt\hat{\Lambda}(t) = 0$ を課すことにしよう．$\hat{H}_F = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{H}_F^{(k)}$，$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{\Lambda}^{(k)}(t)$ と展開されるとする．ここで $\hat{H}_F^{(k)}$，$\hat{\Lambda}^{(k)}(t)$ は $\omega^{-k}$ に比例する．$\hat{H}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t}\hat{H}_n$ とフーリエ変換すると，はじめのいくつかの項は次のように求まる．

$$\hat{H}_F^{(0)} = \hat{H}_0 \tag{12}$$

$$\hat{H}_F^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{[\hat{H}_{-n}, \hat{H}_n]}{n\omega} \tag{13}$$

$$\hat{\Lambda}^{(1)}(t) = i\sum_{n\neq 0}\frac{\hat{H}_n}{n\omega}e^{-in\omega t} \tag{14}$$

周波数が高い極限では，電子は外場の振動に追随することができず，時間平均した $\hat{H}_0 = T^{-1}\int_0^T dt\hat{H}(t)$ (12) しか感知することができない．$\omega^{-1}$ の補正項 (13) は，$n\omega$ のエネルギーを吸収した後，$n\omega$ のエネルギーを放出して元の状態に戻ってくる 2 次摂動のプロセスに対応する．ここでは $\omega^{-1}$ の一次までの展開を示したが，高周波数展開を途中で打ち切ったときに，どの時間スケールまで時間発展を記述できるかについては，最近いくつか厳密な結果が得られている[7,8]．

以上のように，高い周波数をもった振動外場があるときに遅いモードに注目すると，もとのハミルトニアンが有効的に $\hat{H}_F$ に変化したと思うことができる．様々な外場を使って望みの物性が現れるように $\hat{H}_F$ を設計するという考えは，**フロッケエンジニアリング**[5] として盛んに研究されている．

## 4. 非平衡で電子間の斥力を引力に！

時間的に振動する外場のもとで，ハミルトニアンを有効的に変化させることができることを見た．このことを利用して物性を変えることができる例を一つ紹介しよう．

物質中で電子同士はクーロン相互作用を及ぼしあっているが，ひとまず電子間相互作用の効果は無視して電子 1 個の運動を考える．簡単のために 1 次元系を考え，電子は 1 次元鎖上で隣り合う格子点の間を離散的に飛び移るとする．電子が光と相互作用すると，電子は光の作る振動電場を感じることになる．電場 $E(t)$ は空間的に一様だとして，ベクトルポテンシャル $A(t) = A\cos\omega t$ を用いて $E(t) = -\partial A(t)/\partial t$ と表すことにする．

この系のハミルトニアンは

$$\hat{H}(t) = -V\sum_{n=1}^{N}(e^{iA(t)}|n\rangle\langle n+1| + e^{-iA(t)}|n+1\rangle\langle n|) \quad (15)$$

で与えられる．$V$ は電子が隣の格子点に飛び移る確率振幅，$N$ は全格子点数，$|n\rangle$ は $n$ 番目の格子点に電子がいることを表す状態ベクトルであり，周期境界条件 $|N+1\rangle = |1\rangle$ を課す．ベクトルポテンシャルは，確率振幅に複素位相 (パイエルス位相) がかかる形で現れる．格子間隔 $a$，素電荷 $e$ は 1 とおいた．

フーリエ変換をして，波数 $k_m = 2\pi m/N$ $(m = 1,2,\ldots,N)$ の状態ベクトル $|k_m\rangle = N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}e^{-ik_m n}|n\rangle$ を基底にとってハミルトニアンを表示すると，

$$\hat{H}(t) = -2V\sum_{m=1}^{N}\cos(k_m - A(t))|k_m\rangle\langle k_m| \quad (16)$$

と対角化される．電場がないときには，エネルギー固有値 $E_m = -2V\cos k_m$ を持つ．

(16) に対するフロッケハミルトニアンを $\omega^{-1}$ で展開したときの主要項を求めると，

$$\hat{H}_F^{(0)} = -2V\sum_{m=1}^{N}J_0(A)\cos k_m|k_m\rangle\langle k_m| \quad (17)$$

となる．$J_0(A)$ は 0 次のベッセル関数である．電場がないときのハミルトニアンと比べると，飛び移り振幅が $V$ から $J_0(A)V$ に変化したと見ることができる．$J_0(A)$ は $A \geq 0$ で振動しながら減衰する関数である．特に $A$ がベッセル関数の零点 $(A \simeq 2.404, 5.520, \cdots)$ に一致すると，奇妙なことに電子は格子上を全く動くことができなくなる．この現象は**動的局在**[9] として知られている．

さらに $J_0(A) < 0$ となる場合を考えよう．このときは飛び移り振幅の符号が変化するが，飛び移り確率は振幅の 2 乗で与えられるため，平衡状態であれば符号の違いは大きく影響しない．しかし，振動電場をある時刻で突然印加して非平衡状態にもっていったときには，全く異なることが起きる．

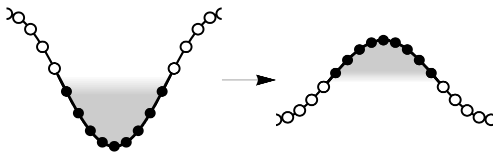

**図 4**　フェルミエネルギー以下の状態が占有されている平衡状態 (左) に振動電場を加えたときに，分布が反転する様子 (右).

電子はフェルミオンの統計性をもっているため，初期状態ではフェルミエネルギー以下のエネルギー固有状態が占有されたディラックの海を形成している (図 4)．ここに振動電場を加えると，エネルギー固有値が有効的に $-2V\cos k_m$ から $-2J_0(A)V\cos k_m$ に変わるために，フェルミエネルギー以上の状態が占有された反転分布が出来上がる[10](図 4)．振動外場を加え続けて一定の時間が経つと，電子の占有分布は一種の**負の温度**[11] を持ったフェルミ・ディラック分布 $f(E) = 1/(e^{E/(k_B T_{\mathrm{eff}})}+1)$ ($T_{\mathrm{eff}} < 0$，$k_B$ はボルツマン定数) に近づく．一般に一度できた反転分布は，系の外部と相互作用して散逸が起きない限り維持される．前節で逆立ちの振り子が安定化したように，逆立ちしたディラックの海が非平衡で安定化するのである．

ここで，電子間に相互作用があるとしたら何が起きるだろう．電子間にはクーロン相互作用による斥力が働いている．相互作用が大きくなく，金属状態にある場合を考える．ハミルトニアンは電子の飛び移りを表す運動項 (15) と相互作用項 $\hat{H}_{\mathrm{int}}$ から成る．(15) で $A = 0$ としたものを $\hat{H}_0$ とおく．相互作用があるときも同様にして，振動電場を加えると飛び移り振幅が $J_0(A)(< 0)$ 倍され，負の温度 $T_{\mathrm{eff}}(< 0)$ を持った分布に近づく．この状態をカノニカル分布と仮定して密度行列で表すと，$\hat{\rho} = e^{-(J_0(A)\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{int}})/(k_B T_{\mathrm{eff}})}/Z$ となる．$Z$ は規格化定数である．書き換えると，$\hat{\rho} = e^{-(\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{int}}/J_0(A))/(k_B T_{\mathrm{eff}}/J_0(A))}/Z$ となる．これは，正の温度 $T_{\mathrm{eff}}/J_0(A) > 0$ を持ち，相互作用項が $1/J_0(A)$ 倍されて符号が反転した状態と等価であることを意味する[10]．

相互作用の符号が反転するということは，斥力相互作用が有効的に引力相互作用に変化したと解釈することができる．不思議なことに，クーロン相互作用はもともと斥力だったはずなのに，振動電場が加わると引力相互作用として働くというのである．

## 5. 非平衡における超伝導？

電子間に引力が働くということは，電子同士がクーパー対を作って凝縮することで超伝導になることが期待される．従来型の超伝導体であれば，格子振動を量子化したフォノンが引力を媒介する．フォノンの振動エネルギーはおよそ 10 meV のオーダーであり，超伝導転移温度は常圧下で高々 40 K ほどである．もし仮にクーロン相互作用を直接引力に変えることができるとしたら，そのエネルギーは 1 eV のオーダーであるので，フォノンの場合と比べて非常に高い転移温度になることが予想される．

実際には，$J_0(A) < 0$ を満たす電場強度をどうやって達成するか，エネルギー散逸をどう避けるのか，振動電場を突然印加することによって発生する余剰エネルギーをどう抑えるかなど，様々な課題があり，電子系では実験的にはまだこの方法による反転分布は実現されていない．しかし，原子集団をレーザー光によって真空中にトラップして極低温まで冷やした冷却原子系では，すでに動的局在や飛び移り振幅の反転などが観測されている[12,13]．

非平衡状態にすることで超伝導が誘起される可能性について，一つのシナリオを見てきた．実験的には，固体結晶にレーザーパルス光を当てることによって，超伝導とよく似た状態を瞬間的に作り出すことができる (**光誘起超伝導**) という報告が最近いくつかなされている[14〜16]．ある有限の時間内でしか状態は持続しないため，電気抵抗を測定することが一般にはできない．代わりに光学伝導度スペクトルやジョセフソンプラズマ共鳴を見ることで，超伝導特有の性質を持っていることが確認されている．その機構についてはわかっていないことが多く，今後の解明が待たれる．

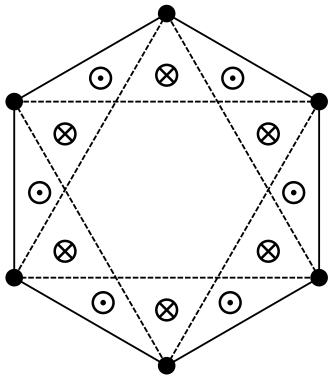

**図 5**　蜂の巣格子上に非一様な磁束 ($\odot$ が上向き，$\otimes$ が下向き) を配置したホルデイン模型．六角形が周期的に並ぶが，そのうちの一つを表示している．

## 6. 非平衡とトポロジカル相

超伝導の場合にはクーパー対の密度が秩序パラメーターであったが，物質が示す「相」はそのような局所的な秩序パラメーターで特徴づけられるものだけではない．波動関数の非局所的な「ねじれ」によって特徴づけられる，**トポロジカル相**というものもある (野村氏の記事参照)．

その代表例として，2 次元蜂の巣格子上に非一様に磁束を配置した**ホルデイン模型**[17] (図 5) が古くから知られているが，提唱された当時は人工的な模型で物理的に実現するのは不可能と思われていた．ところがその後，蜂の巣格子上の電子に高周波数の円偏光の光を加えることで，等価なフロッケハミルトニアンを作り出せることがわかった[18,19]．そこでは，高周波数展開における 2 次摂動の項 (13) が本質的な役割を果たす．さらに，冷却原子系を用いた実験により，ホルデイン模型は物理的に実現された[20]．ホルデインはトポロジカル相の先駆的な仕事により 2016 年にノーベル物理学賞を受賞したが，非平衡によるホルデイン模型の実現はその一翼を担った[21]．

## 7. むすび

本稿では，高い周波数を持った振動外場によって駆動された非平衡状態を見てきたが，これは非平衡状態へ向かう道の一つでしかない．むしろ，時間に依存しないハミルトニアンの問題に帰着できるほうが特殊と言っていいだろう．様々な非平衡状態を経由する道を探ることで，平衡状態にとどまっていると辿り着くことのできなかった，(準)安定状態に到達することができる．そこでは思いもかけない物性と出会うことがある．まだ我々の知らない「隠された状態」が非平衡には存在しているかもしれない．

本稿を執筆するにあたり有益なコメントを頂いた、森貴司氏に感謝したい．

### 参考文献

1) P. L. Kapitza, Sov. Phys. JETP **21**, 588 (1951).
2) ランダウ，リフシッツ (広重徹, 水戸巌訳)『力学』東京図書 (2003).
3) G. Floquet, Ann. Sci. Ec. Normale Super. **12**, 47 (1883).
4) W. Magnus and S. Winkler, “*Hill's Equation*”, John Wiley and Sons (1966).
5) M. Bukov, L. D'Alessio, and A. Polkovnikov, Adv. Phys. **64**, 139 (2015).
6) T. Mikami, S. Kitamura, K. Yasuda, N. Tsuji, T. Oka, and H. Aoki, Phys. Rev. B **93**, 144307 (2016).
7) T. Mori, T. Kuwahara, and K. Saito, Phys. Rev. Lett. **116**, 120401 (2016).
8) T. Kuwahara, T. Mori, and K. Saito, Ann. Phys. **367**, 96 (2016).
9) D. H. Dunlap and V. M. Kenkre, Phys. Rev. B **34**, 3625 (1986).
10) N. Tsuji, T. Oka, and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **106**, 236401 (2011).
11) ランダウ，リフシッツ (小林秋男, 小川岩雄，富永五郎, 浜田達二, 横田伊佐秋訳)『統計物理学 上』岩波書店 (2005).
12) H. Lignier, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 220403 (2007).
13) J. Struck, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 225304 (2012).
14) D. Fausti, *et al.*, Science **331**, 189 (2011).
15) S. Kaiser, *et al.*, Phys. Rev. B **89**, 184516 (2014).
16) M. Mitrano, *et al.*, Nature **530**, 461 (2016).
17) F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
18) T. Oka and H. Aoki, Phys. Rev. B **79**, 081406(R) (2009).
19) T. Kitagawa, T. Oka, A. Brataas, L. Fu, and E. Demler, Phys. Rev. B **84**, 235108 (2011).
20) G. Jotzu, *et al.*, Nature **515**, 237 (2014).
21) Press release: Nobel Prize in Physics 2016 (https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/summary/).

(つじ・なおと，理化学研究所創発物性科学研究センター)