

物理数学 II

辻直人

2024年1月6日

目次

第 0 章	はじめに	5
0.1	講義内容	5
0.2	参考書	6
0.3	成績評価方法	7
第 1 章	偏微分方程式	8
1.1	導入	8
1.2	線形と非線形	9
1.3	重ね合わせの原理	10
1.4	2 階の線形偏微分方程式の分類	10
1.5	境界条件	12
1.6	波動方程式	12
1.6.1	ダランベールの方法	13
1.6.2	初期値問題	14
1.6.3	初期境界値問題	15
1.6.4	ベルヌーイの方法	17
第 2 章	フーリエ級数	20
2.1	実フーリエ級数	20
2.2	フーリエ級数の収束	21
2.3	複素フーリエ級数	24
2.4	ベクトル空間としての見方	25
第 3 章	フーリエ変換	29

3.1	周期 L の周期関数	29
3.2	非周期関数のフーリエ変換	31
3.3	デルタ関数	35
第 4 章	熱伝導方程式	39
4.1	初期値問題	39
4.2	初期境界値問題	42
4.3	熱の発生がある場合	44
第 5 章	グリーン関数	47
5.1	ポアソン方程式	47
5.2	ラプラス方程式	50
5.3	鏡像法	52
第 6 章	ベッセル関数	54
6.1	ベッセルの微分方程式	54
6.2	級数展開	55
6.3	ベッセル関数の諸性質	58
6.3.1	母関数表示	58
6.3.2	漸化式	59
6.3.3	積分表示	60
6.3.4	漸近形	61
6.3.5	直交性	62
6.4	関連する諸関数	64
第 7 章	直交多項式	66
7.1	ルジャンドル多項式	66
7.1.1	ルジャンドルの微分方程式	66
7.1.2	ロドリゲスの公式	68
7.1.3	直交性	69

7.1.4	積分表示	70
7.1.5	母関数	71
7.1.6	漸化式	72
7.1.7	ルジャンドル陪関数	73
7.2	古典直交多項式	74
7.2.1	一般化されたロドリゲスの公式	76
7.2.2	直交性	78
7.2.3	三つの多項式系列	79
7.3	ラゲール多項式	82
7.3.1	直交性	84
7.3.2	積分表示	84
7.3.3	母関数表示	84
7.3.4	漸化式	85
7.3.5	ラゲールの陪多項式	85
7.4	エルミート多項式	86
7.4.1	直交性	87
7.4.2	積分表示	88
7.4.3	母関数表示	88
7.4.4	漸化式	88
第 8 章	超幾何関数	90
8.1	ガウスの超幾何関数	90
8.1.1	フックス型微分方程式	90
8.1.2	超幾何微分方程式	92
8.2	リーマンスキーム	96
8.3	積分表示	99
8.4	合流型超幾何関数	101

第 9 章 球面調和関数と回転群	104
9.1 球面調和関数	104
9.2 回転操作	108
9.3 無限小回転	110
9.4 球面調和関数との関係	112
第 10 章 スツルム・リウビル理論	119
10.1 スツルム・リウビル型微分方程式	119
10.2 自己随伴演算子	121
10.3 固有値、固有関数の性質	123
10.4 量子力学との関係	127
付録 A フーリエ級数の収束	130
付録 B 周期 2π のフーリエ級数で解を展開した場合	133
付録 C 鞍点法	136
付録 D スツルム・リウビル理論の補足	138

第0章 はじめに

0.1 講義内容

この講義では、物理数学 I に続いて量子力学や電磁気学など物理学一般に用いられる微分方程式を解くための様々な数学的ツールを学びます。抽象的な数学の一般論を展開するというよりは、物理で出てくる具体例を通してどのように数学的ツールが使われるかに重点をおきます。具体的に扱うテーマは以下の通りです。

- 偏微分方程式 (波動方程式, 熱伝導方程式, ポアソン・ラプラス方程式など)
- フーリエ級数とフーリエ変換
- 特殊関数と直交多項式 (ベッセル関数, ルジャンドル多項式, 超幾何関数など)
- グリーン関数
- 回転群と表現 (“一般論ではなく具体的に”)

講義日程は以下の予定を考えています (全 7 回)。

11/30 (木) 波動方程式, フーリエ級数

12/7 (木) フーリエ変換, 熱伝導方程式

12/14 (木) グリーン関数, ベッセル関数

12/21 (木) 直交多項式 (ルジャンドル, エルミート, ラゲール, ...)

1/4 (木) 直交多項式の続き, 超幾何関数

1/11 (木) 超幾何関数の続き, 球面調和関数, 回転群

1/25 (木) スツルム・リウビル理論 + 期末試験 (12/13 修正)

0.2 参考書

教科書は特に指定しませんが、以下の文献を参考書として挙げておきます。この講義を準備する際に実際に参考にしました。

- [1] 西森秀稔: 『物理数学 II』 (丸善書店)
- [2] 俣野博、神保道夫: 『岩波講座 現代数学への入門: 熱・波動と微分方程式』 (岩波書店)
- [3] 塚田捷: 『物理数学 II』 (朝倉書店)
- [4] G. アルフケン、H. ウェーバー (権平他訳): 『関数論と微分方程式』 (講談社)
- [5] G. アルフケン、H. ウェーバー (権平他訳): 『特殊関数』 (講談社)
- [6] 犬井鉄郎: 『特殊関数』 (岩波書店)
- [7] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, “Special Functions of Mathematical Physics” (Springer)

また、これまで他の先生が講義されたときの講義ノートがオンラインで入手できますので、参考になります。

- 松尾先生: <http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo/files.html>
- 立川先生: <https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/lectures/>

本講義のノートはホームページで配布します。質問や要望などは ITC-LMS のコメント欄またはメールで受け付けています。

辻直人 (tsuji@phys.s.u-tokyo.ac.jp)

TA: 中本大河 (nakamoto@dyn.phys.s.u-tokyo.ac.jp)

講義ホームページ: <http://dyn.phys.s.u-tokyo.ac.jp/home/index.php/physmath2-2023/>

昨年の講義ノートも公開していますので、先走って覗きたい人は昨年のページを見てみてください。ただし、内容やレポート問題は昨年のものから変更する可能性があります。

0.3 成績評価方法

レポートと期末試験によって評価します。評価比率は

$$(\text{レポート1回目}) : (\text{レポート2回目}) : (\text{期末試験}) = 1 : 1 : 2$$

とします。

レポート

レポートは2回に分けて出題します。1回目のレポートはイントロ(第1章)からグリーン関数(第5章)までの範囲で、2回目はベッセル関数(第6章)からスツルム・リウビル理論(第10章)までの範囲です。講義ノート中に出てくる問から一回のレポート当たり5問以上を目安に選択して解いてください。各問に配点([A]5点、[B]10点)を割り振っています。全て解く必要はありません。各回のレポートの点数の上限は50点とします。提出先はITC-LMS、レポートには必ず 氏名、学籍番号、選択した問題番号 を明記してください。締め切りは1回目: 1/4(木)、2回目: 1/29(月) とします。

期末試験

期末試験は授業の最終回(1/25(木))の3限に行く予定です。詳細は追って説明します。
(12/13 修正)

第1章 偏微分方程式

1.1 導入

物理現象を記述する法則の多くは(なぜか)微分方程式で表される。例えば、

例 1.1. ニュートン方程式 (質点の運動)

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(t) \quad (1.1)$$

例 1.2. 波動方程式 (波の伝搬、弾性体の振動)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (1.2)$$

例 1.3. 熱伝導方程式 (熱の拡散、ブラウン運動)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (1.3)$$

例 1.4. ラプラス方程式 (真空中の静電ポテンシャル)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0 \quad (1.4)$$

例 1.5. ポアソン方程式 (電荷が存在するときの静電ポテンシャル)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y) \quad (1.5)$$

例 1.6. シュレディンガー方程式 (量子力学における波動関数)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) + V(x)\psi(t, x) \quad (1.6)$$

例 1.7. KdV 方程式 (水面上の孤立波の伝搬)

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + 6u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t, x) = 0 \quad (1.7)$$

など。もちろん、物理法則が必ず微分方程式で表される必然性はないし¹、微分方程式で表されない例もある²。興味のある人は調べてみてください。いずれにせよ、これから物理を学ぶと多くの場面で微分方程式に出くわすことになる。一般には微分方程式を解くということは難しいことだが、幸運にもいくつかの限られた簡単な場合には手で解くことができる。それらの簡単な場合を足場にするすることで、物理現象の理解を広げていくことができる。本講義では、そのような簡単な場合を中心に数学的ツールを学んでいく。

微分方程式のうち、未知関数の変数が一つのを常微分方程式、複数のものを偏微分方程式 (Partial Differential Equation (PDE)) という。物理数学 II では主に偏微分方程式を扱う。ただし、多くの例では常微分方程式を解くことに帰着される場合が多い。

1.2 線形と非線形

微分方程式が未知関数について 1 次式で表されるものを線形であるといい、2 次以上の項を含むものを非線形という。非線形方程式は線形方程式より解くことがずっと難しい。

未知関数を $u(x_1, x_2, \dots)$ とすると、線形の微分方程式は一般に以下のように表される。

$$F\left(x_1, x_2, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots\right)u(x_1, x_2, \dots) + G(x_1, x_2, \dots) = 0 \quad (1.8)$$

このうち $G(x_1, x_2, \dots) = 0$ となる場合を斉次あるいは同次 (homogeneous)、そうでない場合を非斉次あるいは非同次 (inhomogeneous) という。

¹微分方程式は、物理法則を表すための一つの「表現」にすぎない場合もある。例えば量子力学における行列力学と波動力学の等価性がその一例である。それでも微分方程式の果たす役割の大きさは否定できないだろう。なぜ人間は微分方程式で表したがるのか、考えてみると面白いかもしれない。

²例えば熱力学第二法則は不等式で表される。

問 1.1. [B] 物理で出てくる非線形偏微分方程式を一つ取り上げ、その物理的意味や背景について調べよ。

1.3 重ね合わせの原理

線形斉次微分方程式が扱いやすい理由の一つに、重ね合わせの原理 というものがある。偏微分方程式が以下のように表されるとしよう。

$$F\left(x_1, x_2, \dots, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots\right) u(x_1, x_2, \dots) = 0 \quad (1.9)$$

そして、この方程式の解がいくつか見つかったとする。それらを u_1, u_2, \dots, u_N とすると、任意の定数 c_1, c_2, \dots, c_N に対して

$$u(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^N c_j u_j(x_1, x_2, \dots) \quad (1.10)$$

も解であることが直ちにわかる。このことは微分演算子の線形性

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N c_j u_j(x_1, x_2, \dots) \right) = \sum_{j=1}^N c_j \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x_1, x_2, \dots) \quad (1.11)$$

から明らか。このように解の線形結合をとっても解になっていることを重ね合わせの原理という。特に無限個の解が見つかるような場合は $N \rightarrow \infty$ とすることができて、解の作り方に無限の自由度を持たせることができる。

微分方程式には、初期条件や境界条件 (後で詳しく述べる) のように特定の条件を課して解を求める必要がある場合があるが、基本パーツ u_1, u_2, \dots を求めておいて、それらをうまく組み合わせることで条件に合う解を構成していくという戦略をとることができる。

1.4 2階の線形偏微分方程式の分類

物理で出てくる多くの物理法則は2階 (またはそれ以下) の微分方程式で表される。そこで2階の線形偏微分方程式の分類についてまとめておく。ここでは簡単のため2変数で定

数係数の場合を考える。微分方程式は一般に以下の形をしている。

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, x_2) \quad (1.12)$$

ここで $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ 、 $a_{ij} = a_{ji}$ 。 $A := (a_{ij})$ は 2×2 の対称行列だからある直交行列 O によって対角化できる。

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

固有値 λ_1, λ_2 は実。

$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ のときは、変数変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} x'_1 \\ \sqrt{|\lambda_2|} x'_2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

により微分方程式を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} + (\dots) = 0 \quad (1.15)$$

という形にできる (標準形)。(…) は前に出てくる項より低い階の微分のみ含む。このような方程式を楕円型という。

同様に $\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$ のときは、適当な変数変換により微分方程式を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} + (\dots) = 0 \quad (1.16)$$

という形にできる。このような方程式を双曲型という。

$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ のときは、例えば $\lambda_1 = 0$ のとき適当な変数変換により微分方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial x_1'} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} + (\dots) = 0 \quad (1.17)$$

という形にできる。このような方程式を放物型という。

このように微分の最高次の項に注目して大まかに分類できる。表 1.1 に例とともにまとめた。3 変数以上の場合や係数が定数でない場合についても同様の分類がある [2]。

	楕円型	双曲型	放物型
固有値	$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 \lambda_2 = 0$
条件	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$	$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$
標準形	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (\dots) = 0$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (\dots) = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (\dots) = 0$
例	ラプラス方程式、ポアソン方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	波動方程式 $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	熱伝導方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

表 1.1: 2 階の定数係数線形微分方程式の分類。

1.5 境界条件

偏微分方程式は境界条件 (変数の一つが時間の場合は初期条件も含む) を指定することで解が定まる。未知関数 $u(x)$ が定義されている領域を Ω として、その境界を $\partial\Omega$ と書くことにする。代表的な境界条件として、以下のものがある。

- ディリクレ (Dirichlet) 境界条件: $u(x)$ ($x \in \partial\Omega$) を指定。
- ノイマン (Neumann) 境界条件: $\mathbf{n} \cdot \nabla u(x)$ ($x \in \partial\Omega$) を指定。ただし \mathbf{n} は境界での法線方向のベクトル。

この他に、これらの両方を課すものや混合したようなものもある。

1.6 波動方程式

1 次元の波動方程式を例にとって考えてみる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (1.18)$$

ここで c は定数。この方程式は波の伝播や弾性体の振動などの現象を記述する。

1.6.1 ダランベールの方法

やや発見法的に微分方程式 (1.18) を解いてみる。以下のように書き直す。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = 0 \quad (1.19)$$

ここで新しい変数

$$\xi = x - ct \quad (1.20)$$

$$\eta = x + ct \quad (1.21)$$

を定義する。これは変数の組 (t, x) から (ξ, η) への 1 次変換であり、 ξ と η は独立な変数とみなせる。そこで $u(t, x)$ を $u(\xi, \eta)$ と書くことにする。微分演算子の変換は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.23)$$

で与えられる。このことを用いると

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \eta) = 0 \quad (1.24)$$

という微分方程式が得られる。式 (1.24) の両辺を、 ξ を定数とみて η について積分してみる。右辺は 0 を積分すると定数だが、今は ξ を定数としてみているので ξ の任意の関数 $c(\xi)$ になる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, \eta) = c(\xi) \quad (1.25)$$

今度は η を定数とみて ξ について積分する。 $c(\xi)$ の (不定) 積分を $f(\xi)$ とし、さらに η を定数とみなすので任意の η の関数 $g(\eta)$ を積分定数として足すことになる。

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (1.26)$$

これが微分方程式 (1.24) の一般解。もとの変数 (t, x) で表すと

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.27)$$

となる。第一項は x 軸を正の向きに進む進行波を、第二項は負の向きに進む進行波を表す (図 1.1)。

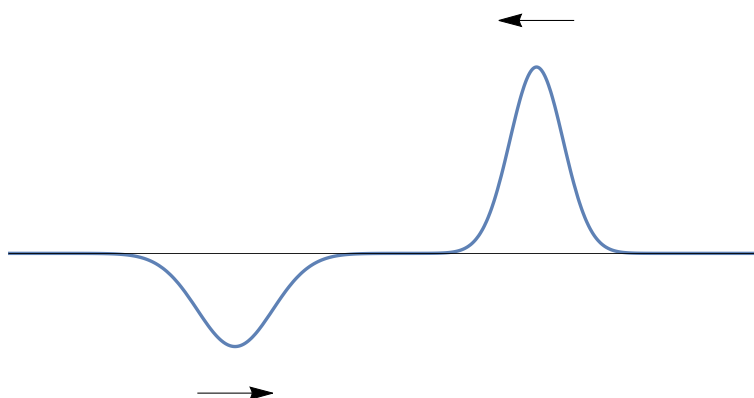


図 1.1: x 軸を正の向きに進む進行波と負の向きに進む進行波。

ここで示した解法は、式 (1.18) のような特別な形の微分方程式に対してたまたまうまくいった解法に過ぎないことに注意。例えば 2 次元の波動方程式に対してはこのような解法をそのまま応用することはできない。

1.6.2 初期値問題

波動方程式 (1.18) は時間に関して 2 階の微分方程式なので、以下のようにある時刻 (例えば $t = 0$) における波形とその 1 階微分を初期条件として与えることで解を一意に定めることができる。

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (1.28)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=0} = u_1(x) \quad (1.29)$$

式 (1.27) に代入すると

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \quad (1.30)$$

$$-cf'(x) + cg'(x) = u_1(x) \quad (1.31)$$

となる。式 (1.31) を x に関して 0 から y まで積分すると

$$-cf(y) + cg(y) + cf(0) - cg(0) = \int_0^y dx u_1(x) \quad (1.32)$$

を得る。これと式 (1.30) を合わせて $f(x)$ と $g(x)$ に関して解くと

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2}(f(0) - g(0)) - \frac{1}{2c} \int_0^x dy u_1(y) \quad (1.33)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2}(f(0) - g(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^x dy u_1(y) \quad (1.34)$$

となる。結局、初期条件 (1.28), (1.29) を満たすような波動方程式 (1.18) の解は

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy u_1(y) \quad (1.35)$$

と求まったことになる。式 (1.35) はダランベール (d'Alembert) の解とよばれる。

1.6.3 初期境界値問題

今度は初期条件だけでなく、境界条件もある場合を考えてみよう。例として両端 ($x = 0, a (> 0)$) が固定されたひもの振動を考える。初期条件として以下のものをとる。

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (1.36)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (1.37)$$

ここでは簡単のために 1 階微分はゼロとした。 $u_0(x)$ が初期のひもの変位を表していて、 $u_0(0) = u_0(a) = 0$ とする。先ほどとは違って $u_0(x)$ は $0 \leq x \leq a$ の範囲でしか定義されていないことに注意。固定端の条件は

$$u(t, 0) = 0 \quad (1.38)$$

$$u(t, a) = 0 \quad (1.39)$$

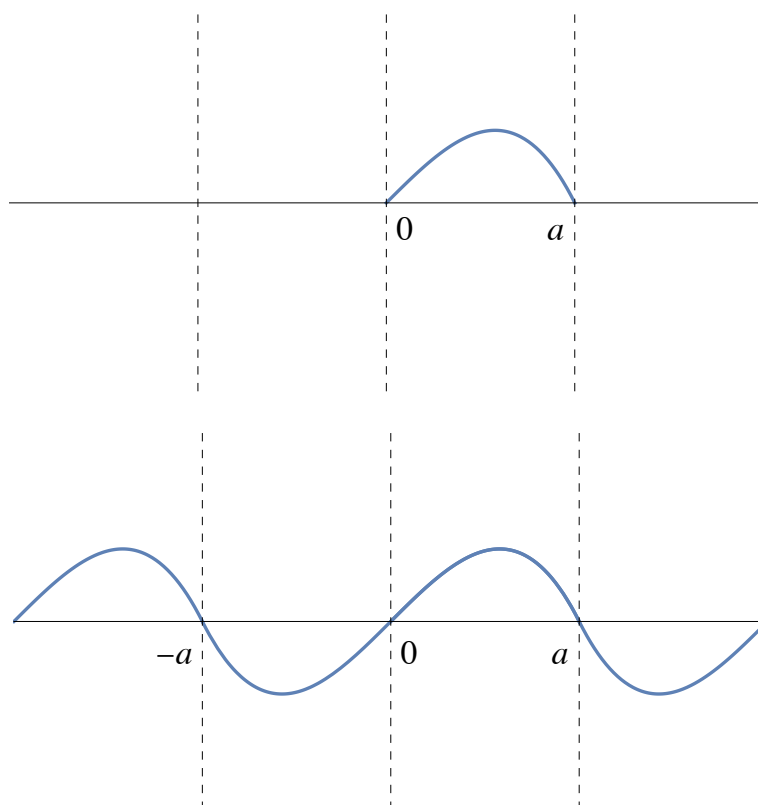


図 1.2: $0 \leq x \leq a$ で定義された $u_0(x)$ (上) と、拡張された定義域における $u_0(x)$ (下)。

と書かれる。初期条件だけから解は (1.35) で $u_1(x) = 0$ としたものの、つまり

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) \quad (1.40)$$

で与えられるように思えるが、 $u_0(x)$ が $0 \leq x \leq a$ の範囲でしか定義されていないため、式 (1.40) が意味を持つのは $0 \leq x - ct \leq a$ かつ $0 \leq x + ct \leq a$ のときのみ。

それ以外の範囲の解を求めるために、境界条件に合うように $u_0(x)$ の定義域を拡張してみる。式 (1.40) を形式的に (1.38), (1.39) に代入すると

$$u_0(-ct) + u_0(ct) = 0 \quad (1.41)$$

$$u_0(a - ct) + u_0(a + ct) = 0 \quad (1.42)$$

を得る。この関係式が満たされるように $u_0(x)$ の定義域を広げていく (図 1.2)。まず、(1.41)

が成り立つように $-a \leq x \leq 0$ において $u_0(x)$ を

$$u_0(x) := -u_0(-x) \quad (-a \leq x \leq 0) \quad (1.43)$$

と定義する。次に (1.41), (1.42) から $a \leq x \leq 2a$ において $u_0(x)$ を

$$u_0(x) := u_0(x - 2a) \quad (a \leq x \leq 2a) \quad (1.44)$$

と定義する。条件 (1.44) は定義域を $2a$ だけずらすことに対応するので、この関係を繰り返し用いることで任意の実数 x に対して $u_0(x)$ を以下のように定義することができる。

$$u_0(x) := \begin{cases} u_0(x - 2na) & 2na \leq x \leq (2n + 1)a \\ -u_0(-x + 2na) & (2n - 1)a \leq x \leq 2na \end{cases} \quad (1.45)$$

ここで $n \in \mathbb{Z}$ 。このように拡張された $u_0(x)$ を用いて初期境界値問題の解は式 (1.40) で与えられる。実際に式 (1.40) は初期条件と境界条件を満たすことが確かめられる。

1.6.4 ベルヌーイの方法

一方、波動方程式 (1.18) の初期境界値問題を全く別の方法で解くこともできる。初期条件と境界条件は上と同じもの ((1.36), (1.37), (1.38), (1.39)) を考える。ここでもやや発見法的になるが、変数分離形

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad (1.46)$$

を仮定してみよう。式 (1.18) に代入して少し変形すると、

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (1.47)$$

という表式を得る。この式をよく見てみると、左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数になっている。この両者が等しくなるためには、両辺が定数になるしかない。その定数を $-\omega^2$ とおこう (ω を複素数まで考えれば一般性を失わない)。すると、関数 $T(t), X(x)$ は

各々以下の常微分方程式を満たす。

$$T''(t) = -\omega^2 T(t) \quad (1.48)$$

$$X''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} X(x) \quad (1.49)$$

この方程式の一般解は知っていて、

$$T(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1.50)$$

$$X(x) = C_3 \cos \left(\frac{\omega}{c} x \right) + C_4 \sin \left(\frac{\omega}{c} x \right) \quad (1.51)$$

と表される。 C_1, \dots, C_4 は任意定数。

境界条件 (1.38), (1.39) が任意の t で満たされるためには

$$C_3 = 0 \quad (1.52)$$

$$\sin \left(\frac{\omega}{c} a \right) = 0 \quad (1.53)$$

が成り立つ必要がある。これを満たす ω は

$$\omega = \omega_n = \frac{c}{a} n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (1.54)$$

で与えられる。つまり ω はとびとびの値しかとれない。 $n = 0$ とすると $X(x)$ が恒等的に 0 になってしまうので $n \neq 0$ である。 n が負のときは負符号を C_4 に吸収できるので $n > 0$ とできる。

以上より条件 (1.37), (1.38), (1.39) を満たす解として

$$u_n(t, x) = (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) \sin \left(\frac{\omega_n}{c} x \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.55)$$

が見つかった。ここで任意定数を改めて C_{1n}, C_{2n} とおいた。微分方程式 (1.18) は線形斉次方程式だったので重ね合わせの原理が適用できる。すなわち、

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) \sin \left(\frac{\omega_n}{c} x \right) \quad (1.56)$$

も解になっている。実は式 (1.56) は驚くべきことに (1.38), (1.39) を満たす一般解になっている。あとは初期条件 (1.36), (1.37) を満たすように定数 C_{1n}, C_{2n} を調整すればいい。

解の表示 (1.56) はダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli) によって 18 世紀半ばに与えられた。ちなみに、このような級数解の一般論を展開したフーリエの仕事は 19 世紀初頭になされた。式 (1.40) (または式 (1.35)) と (1.56) は全く見かけの異なる表示にも関わらず、両者とも正しい解を与えている。18 世紀当時、いずれの解の表示が優れているかについてすでに論争があったようだ [2]。

C_{1n}, C_{2n} は以下のように求めることができる。初期条件 (1.37) が任意の x で満たされるためには

$$C_{2n} = 0 \quad (1.57)$$

である必要がある。初期条件 (1.36) は

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) = u_0(x) \quad (1.58)$$

と書ける。ここで両辺に $\sin\left(\frac{\omega_m}{c}x\right)$ ($m = 1, 2, \dots$) をかけて x について 0 から a まで積分することにする。和と積分を入れ換えることができると仮定すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \int_0^a dx \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \sin\left(\frac{\omega_m}{c}x\right) = \int_0^a dx \sin\left(\frac{\omega_m}{c}x\right) u_0(x) \quad (1.59)$$

となる。公式

$$\int_0^{\pi} dx \sin mx \sin nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (1.60)$$

を用いると

$$C_{1m} = \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{\omega_m}{c}x\right) u_0(x) \quad (1.61)$$

と求まる。

第2章 フーリエ級数

前章で出てきた考え方を見直してみよう。式 (1.58) は境界条件 $u_0(0) = u_0(a) = 0$ を満たす $0 \leq x \leq a$ で定義された「任意の」関数 $u_0(x)$ が三角関数の重ね合わせで表せるということを主張しているようにみえる。この考え方を拡張してみよう。

2.1 実フーリエ級数

$f(x)$ を周期 2π の周期関数とする。

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad (2.1)$$

$f(x)$ が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.2)$$

のように三角関数の重ね合わせで書けるとき、式 (2.2) の右辺を (実) フーリエ級数 とよぶ。定数 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ をフーリエ係数という。ほとんどの関数 (例えば微分可能な連続関数など) がこのような形で表されることが知られている。このように、性質のよくわかっている三角関数に分解して考えるといろいろと便利なことが多い。

フーリエ係数を求めるためには、前節と同様に三角関数の直交性を用いる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \begin{cases} \pi \delta_{m,n} & (m, n) \neq (0, 0) \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin mx \sin nx = \pi \delta_{m,n} \quad (m, n \geq 1) \quad (2.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \sin nx = 0 \quad (2.5)$$

$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタを表す。

$$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (2.6)$$

これらの関係からフーリエ係数が以下のように一意的に与えられることがわかる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos nx \quad (n \geq 0) \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin nx \quad (n \geq 1) \quad (2.8)$$

一般には次の定理が成り立つ。

2.2 フーリエ級数の収束

定義 2.1. 区分的に連続

区間 (a, b) において高々有限個の点で不連続な関数 $f(x)$ について、各不連続点 x_0 で極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x_0 + \varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x_0 - \varepsilon)$ が存在し、さらに端点での極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(a + \varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(b - \varepsilon)$ が存在するとき、 $f(x)$ は (a, b) において区分的に連続であるという。

定義 2.2. 右微分、左微分

関数 $f(x)$ に対して右微分 $f'_R(x)$ 、左微分 $f'_L(x)$ を次のように定義する。

$$f'_R(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x_+)}{\varepsilon} \quad (2.9)$$

$$f'_L(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x_-)}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

ここで $f(x_+) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x + \varepsilon)$, $f(x_-) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x - \varepsilon)$ 。

定理 2.1. フーリエ級数の各点収束

$(-\pi, \pi)$ で区分的に連続で、 $(-\infty, \infty)$ で周期 2π をもつ周期関数 $f(x)$ に対して a_n, b_n を (2.7, 2.8) で定める。左右の微分係数 $f'_L(x), f'_R(x)$ が存在する各点 x でフーリエ級数は収束し、次が成り立つ。

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.11)$$

証明は付録 A を参照。特に点 x で $f(x)$ が連続ならば式 (2.2) が成り立つ。

例 2.1. $f(x)$ として次のような階段関数を考える。 $[-\pi, \pi)$ において

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

と与えられ、それ以外の区間では周期 2π で繰り返し同じ形を並べる。この関数をフーリエ級数展開したときのフーリエ係数は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \cos nx = \begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin nx = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数} \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ が奇数} \end{cases} \quad (2.14)$$

以上より $f(x)$ のフーリエ級数は

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x \quad (2.15)$$

となる。不連続点 ($x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$) では $\frac{1}{2}$ に収束する。これは不連続なとびの中間値 ($f(x_+) + f(x_-)$)/2 に対応していて、定理 2.1 と整合している。図 2.1 にフーリエ級数が収束していく様子を示した。

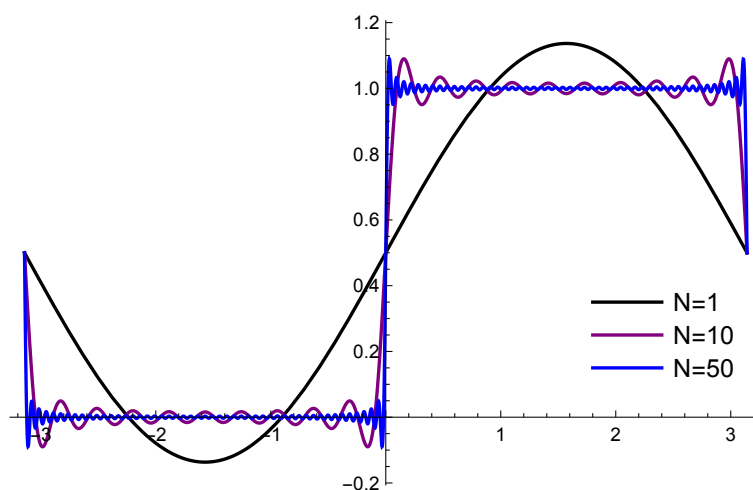


図 2.1: フーリエ級数 (2.15) を $m = N$ までの有限和で置き換えたものを、 $N = 1, 10, 50$ に対してプロットした。

式 (2.15) において $x = \frac{\pi}{2}$ を代入すると $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ よりライプニッツの公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (2.16)$$

が得られる。

問 2.1. [A] $f(x)$ として、区間 $[-\pi, \pi]$ では

$$f(x) = e^{-|x|} \quad (2.17)$$

で与えられ、それを繰り返し並べて周期 2π の周期関数にしたものを考える。この関数をフーリエ級数展開したときのフーリエ係数を求めよ。

問 2.2. [A] 前問の結果を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \quad (2.18)$$

を求めよ。

問 2.3. [A] $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数が $f(x)$ に一様収束するとする。このとき以下のパーセヴァル (Parseval) の等式を示せ。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx (f(x))^2 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.19)$$

2.3 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad (2.20)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad (2.21)$$

を用いると、フーリエ級数を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + b_n \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ここで係数 c_n を次のように定義した。

$$c_n := \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

このような表し方を複素フーリエ級数とよぶ。これに対して式 (2.2) の右辺を実フーリエ級数とよぶことがある。指数関数の直交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{imx} e^{-inx} = 2\pi \delta_{m,n} \quad (2.24)$$

を用いると、フーリエ係数 c_n は次のように表される。

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f(x) \quad (2.25)$$

2.4 ベクトル空間としての見方

周期 2π の周期関数 $f(x), g(x)$ があるときに、これらの線型結合 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も周期 2π の周期関数になる。このことから、周期関数の集合をベクトル空間とみなしたくなる。実際にそのようなことができ、フーリエ級数展開は直交基底による展開だと思えるようになる。直交性が出てくるので、単なるベクトル空間ではなくて内積が定義された内積空間と見るべき。ただし空間の次元が無限大になることで数学的に微妙な点が出てくるが、ここでは物理屋のレベルで扱うことにする。

定義 2.3. (複素) ベクトル空間

集合 V が以下の性質を満たすとき、(複素) ベクトル空間という。

(和の公理)

任意の $\vec{u}, \vec{v} \in V$ に対して和 $\vec{u} + \vec{v} \in V$ が定義され、以下を満たす。

(i) 交換則: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(ii) 結合則: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(iii) 0 元の存在: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(iv) 逆元の存在: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(スカラー倍の公理)

任意の $\vec{u} \in V, \alpha \in \mathbb{C}$ に対してスカラー倍 $\alpha\vec{u} \in V$ が定義され、以下を満たす。

(i) 分配則: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(ii) 分配則: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(iii) 積の両立: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

(iii) 単位元の存在: $1\vec{u} = \vec{u}$

定義 2.4. 線形写像 (線形演算子)(複素) ベクトル空間 V, W に対して、写像 $f: V \rightarrow W$ が以下の性質を満たすとき f を線形写像 (線形演算子) という。

(i) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad (\forall \vec{u}, \vec{v} \in V)$

(ii) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) \quad (\forall \vec{u} \in V, \alpha \in \mathbb{C})$

定義 2.5. 内積空間(複素) ベクトル空間 V に対して内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ が定義され以下の性質を満たすとき、 V を内積空間という。

(i) 複素共役: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$

(ii) 線形性: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

(iii) スカラー倍: $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(iv) 正定値性: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

定義 2.6. ノルム内積空間 V には、ノルム $\|\cdot\|$ (ベクトルの長さ) が定義される。

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \quad (2.26)$$

定義 2.7. 正規直交基底

内積空間 V に対してベクトルの集合 $\{\vec{u}_n \in V\}$ が以下を満たすとき、 $\{\vec{u}_n\}$ を正規直交基底という。

$$V = \left\{ \sum_n \alpha_n \vec{u}_n \mid \alpha_n \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.27)$$

$$\langle u_m, u_n \rangle = \delta_{m,n} \quad (2.28)$$

ベクトル空間の次元が無限大の場合は、上の定義で無限和は「適切に」定義されている必要がある。

正規直交基底の選び方は一意ではないが、正規直交基底を一つ選ぶと各ベクトル $\vec{v} \in V$ はその基底で一意に展開することができる。

$$\vec{v} = \sum_n \alpha_n \vec{u}_n \quad (2.29)$$

$$\alpha_n = \langle \vec{u}_n, \vec{v} \rangle \quad (2.30)$$

この関係は、(複素) フーリエ級数展開 (2.22), (2.25) と完全に対応していることがわかる。そこで、周期 2π の周期関数の集合 V 上に内積を以下で定義する。

定義 2.8. 周期関数の間の内積

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} dx \overline{f(x)} g(x) \quad (f, g \in V) \quad (2.31)$$

このように定義した内積が、内積の公理を満たしていることは簡単に確かめられる。このとき、周期関数の集合 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は V の正規直交基底になっている。

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle = \delta_{m,n} \quad (2.32)$$

実フーリエ級数についても同様である。ベクトル空間の例として馴染みのある n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n との対応関係を以下の表 2.1 にまとめた。

	ユークリッド空間	実フーリエ級数	複素フーリエ級数
集合	\mathbb{R}^n	周期 2π の関数	周期 2π の関数
内積	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)g(x)$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx \overline{f(x)}g(x)$
正規直交基底	\mathbf{e}_i	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$
直交性	$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$	$\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \rangle = \delta_{m,n},$ $\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \rangle = 0, \dots$	$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \rangle = \delta_{m,n}$
展開	$\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$
係数	$v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}$	$a_n = \langle \frac{1}{\pi} \cos nx, f \rangle, b_n = \langle \frac{1}{\pi} \sin nx, f \rangle$	$c_n = \langle \frac{1}{2\pi} e^{inx}, f \rangle$
ノルムの 2 乗	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_i v_i^2$	$\ f\ ^2 = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_n (a_n^2 + b_n^2)$	$\ f\ ^2 = 2\pi \sum_n c_n ^2$

表 2.1: ユークリッド空間とフーリエ級数の比較。

第3章 フーリエ変換

これまでは周期 2π の周期関数を考えたが、もっと一般の周期性を必ずしも持たない関数を考えることもできる。

3.1 周期 L の周期関数

そのための準備として、周期 $L(> 0)$ の周期関数 $f(x) = f(x + L)$ を考える。

$$g(x) := f\left(\frac{xL}{2\pi}\right) \quad (3.1)$$

と定義すると $g(x)$ は周期 2π の周期関数になるので前節のようにフーリエ級数展開ができる。

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (3.2)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} g(x) \quad (3.3)$$

$f(x)$ についての関係式に書きかえると、周期 L の周期関数の (複素) フーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi inx}{L}} \quad (3.4)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-inx} f\left(\frac{xL}{2\pi}\right) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-\frac{2\pi inx}{L}} f(x) \quad (3.5)$$

となる。実フーリエ級数についても同様。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{L} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{L} \right) \quad (3.6)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \cos \frac{2\pi nx}{L} \quad (n \geq 0) \quad (3.7)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx f(x) \sin \frac{2\pi nx}{L} \quad (n \geq 1) \quad (3.8)$$

例 3.1. 周期 $L = 1$ の場合は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (3.9)$$

$$c_n = \int_{-1/2}^{1/2} dx e^{-2\pi i n x} f(x) = \int_0^1 dx e^{-2\pi i n x} f(x) \quad (3.10)$$

例 3.2. $x \rightarrow \pm\infty$ で十分速く減衰する関数 $f(x)$ について

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \quad (3.11)$$

とおくと、 $g(x)$ は周期 1 の周期関数。フーリエ級数展開すると

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 dx e^{-2\pi i n x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} dx e^{-2\pi i n x} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\pi i n x} f(x) =: \hat{f}(n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ここで $\hat{f}(n)$ を最後の等式で定義した。これは次節で導入する $f(x)$ のフーリエ変換の特殊な場合に対応している。書き直すと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n x} \hat{f}(n) \quad (3.14)$$

となる。 $x = 0$ を代入すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \quad (3.15)$$

という関係が得られる。この関係式はポアソン和公式とよばれる。

問 3.1. [A] $f(x) = e^{-\alpha\pi x^2}$ ($\alpha > 0$) に対してポアソン和公式を適用することで等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi n^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\alpha}} \quad (3.16)$$

を示せ。

[コメント: 式 (3.16) は $z, \tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \tau > 0$ で定義されたテータ関数

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau + 2\pi i n z} \quad (3.17)$$

について成り立つ関係式

$$\vartheta\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi z^2}{\tau}} \vartheta(z, \tau) \quad (3.18)$$

の特殊な場合 ($z = 0, \tau = i\alpha$) に対応する。]

3.2 非周期関数のフーリエ変換

前節で任意の周期 L をもった周期関数のフーリエ級数展開を与えた。 L を大きくする極限を考えることで、周期性を持たない関数も扱うことができる。式 (3.4), (3.5) において

$$k := \frac{2\pi n}{L} \quad (3.19)$$

$$c_n = c_{kL/2\pi} =: \frac{1}{L} \tilde{f}(k) \quad (3.20)$$

$$\Delta k := \frac{2\pi}{L} \quad (3.21)$$

とおくと、周期 L の周期関数の (複素) フーリエ級数は以下のように書ける。

$$f(x) = \frac{\Delta k}{2\pi} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (3.22)$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ikx} f(x) \quad (3.23)$$

周期 L を大きくしていくことを考える ($L \rightarrow \infty$)。すると、もはや $f(x)$ の周期性は忘れてよくて、一般の周期性を持たない関数とみなせるようになる。このとき

$$\Delta k \sum_k \rightarrow \int dk \quad (3.24)$$

のように和を積分に置き換えると、次の関係が得られる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (3.25)$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (3.26)$$

$\tilde{f}(k)$ を $f(x)$ のフーリエ変換という。また、 $f(x)$ を $\tilde{f}(k)$ の逆フーリエ変換という。規格化定数を次のように対称的に選ぶこともよくある。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (3.27)$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (3.28)$$

式 (3.25)-(3.28) の右辺のような積分をフーリエ積分という。以下ではフーリエ (逆) 変換の定義として (3.25), (3.26) を用いることにする。

多変数 (高次元) の場合のフーリエ変換も同様に定義される。

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{f}(\mathbf{k}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n) \quad (3.29)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (3.30)$$

物理では、 x を空間座標と思うときは k は波数に対応する。時間座標 t の場合は、フーリエ変換した関数の変数は周波数 ω に対応する。このときフーリエ変換は、平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$ の重ね合わせに分解することを意味する。

フーリエ変換の諸性質

$f(x), g(x)$ のフーリエ変換を $\tilde{f}(k), \tilde{g}(k)$ とする。

- (i) $f(x+a)$ のフーリエ変換は $e^{ika} \tilde{f}(k)$
- (ii) $f(ax)$ ($a \neq 0$) のフーリエ変換は $|a|^{-1} \tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$
- (iii) $e^{iax} f(x)$ のフーリエ変換は $\tilde{f}(k-a)$
- (iv) $f'(x)$ のフーリエ変換は $ik \tilde{f}(k)$
- (v) $xf(x)$ のフーリエ変換は $i \tilde{f}'(k)$
- (vi) 畳み込み $(f * g)(x)$ のフーリエ変換は $\tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$

ここで畳み込みは

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) \quad (3.31)$$

で定義される。

問 3.2. [A] (i)-(iii) を示せ。

問 3.3. [A] (iv)-(vi) を示せ。

例 3.3. $f(x)$ として次のような振動しながら減衰する関数 ($\gamma, \omega > 0$) を考える。

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\gamma x} \sin \omega x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

このとき $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\gamma x} \sin \omega x \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\gamma x} \frac{1}{2i} (e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{ik - i\omega + \gamma} - \frac{1}{ik + i\omega + \gamma} \right) \\ &= \frac{\omega}{(ik + \gamma)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

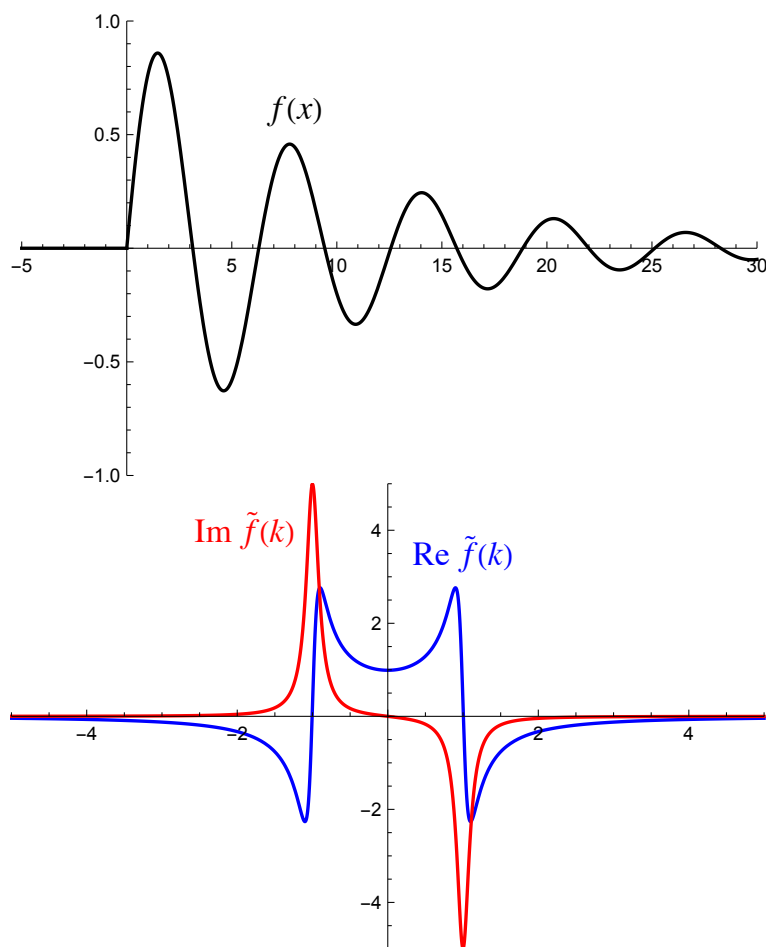


図 3.1: $f(x)$ (上) とそのフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ (下) のプロット ($\gamma = 0.1, \omega = 1$)。

である。図 3.1 に $f(x)$ とそのフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ をプロットした。 $\gamma \ll \omega$ のときに、 $\tilde{f}(k)$ は $k \sim \pm\omega$ 付近に共鳴構造を持つ。すなわち、 $\tilde{f}(k)$ の虚部は $k \sim \pm\omega$ 付近に幅 γ 程度の共鳴ピークを持ち、実部は符号が反転する。共鳴ピークの位置 ($k \sim \pm\omega$) によってどの周波数成分が $f(x)$ に主に含まれるかがわかり、共鳴ピークの幅 ($\sim \gamma$) によってその振動の減衰する速さがわかる。

例 3.4. $f(x)$ として次のようなガウス関数を考える。

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0) \quad (3.34)$$

このとき $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x+ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{k^2\sigma^2}{2}}\end{aligned}\quad (3.35)$$

ここで $z = x + ik\sigma^2$ とおくと $z = -\infty + ik\sigma^2$ から $+\infty + ik\sigma^2$ までの複素積分になるが、コーシーの積分定理により $z = -\infty$ から $+\infty$ までの実軸上の積分に置き換えられる。よって

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}\quad (3.36)$$

と求まる。すなわち幅 σ のガウス関数のフーリエ変換は幅 σ^{-1} のガウス関数。

問 3.4. [B] 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)\quad (3.37)$$

のフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ を求めよ。

問 3.5. [B] 関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\quad (3.38)$$

のフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ を求めよ。

3.3 デルタ関数

上の例でガウス関数のフーリエ変換を考えたが、 σ を小さくしていくとピークがどんどん鋭くなっていく (図 3.2)。 $\sigma \rightarrow 0$ の極限をとると式 (3.34) の $f(x)$ は幅が無限小で高さが無限大のピークを持った“関数”と考えることができる。そのような“関数”をディラック

のデルタ関数とよんで、 $\delta(x)$ で表す。 $x = 0$ での値が無限大になるので通常の意味での関数ではないが、このようなものも関数だと思って扱うことが物理ではよくある。

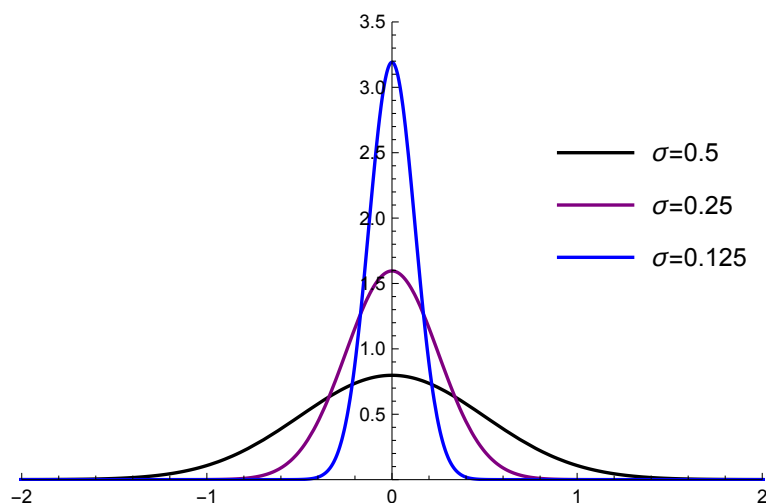


図 3.2: 幅 σ を小さくしていったときのガウス関数 (3.34) の振る舞い。

デルタ関数のフーリエ変換は幅が無限大のガウス関数なので

$$\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \delta(x) = 1 \quad (3.39)$$

である。特に

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (3.40)$$

が成り立つ。より一般に任意の関数 $g(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(x) = g(0) \quad (3.41)$$

となる。これはデルタ関数が $x = 0$ 以外ではゼロになるため被積分関数の中の $g(x)$ を $g(0)$ に置き換えることができ、 $\int dx \delta(x) = 1$ を使うと得られる。任意の $g(x)$ に対して式 (3.41) が成り立つことがデルタ関数 $\delta(x)$ の定義だと思ってもよい。

ガウス関数の幅 $\sigma \rightarrow 0$ の極限としてデルタ関数を導入したが、必ずしもガウス関数の

極限にとられる必要はない。例えば次のような矩形関数の極限だと思ってもよい。

$$f_n(x) = \begin{cases} n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) = 1 \quad (3.43)$$

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (3.44)$$

要は、積分して1になることを保ちながら $x = 0$ でピークが鋭く立ち上がる関数の極限だと思えばよい。

高次元のデルタ関数は以下のように定義される。

$$\delta^n(\mathbf{x}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad (3.45)$$

高次元空間で積分したらちょうど1になる。

$$\int d^n \mathbf{x} \delta^n(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.46)$$

物理では、デルタ関数は1点に電荷が集中した点電荷の電荷分布や量子力学で1点に振幅が集中した波動関数などで出てくる。また、次の章の熱伝導方程式やグリーン関数のところでも出てくる。

デルタ関数の諸性質

$$(i) \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

$$(ii) \delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x) \quad (a \neq 0)$$

$$(iii) \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (\text{ただし和は } f(x) = 0 \text{ となる点 } x_n \text{ に渡ってとる})$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta'(x) = -g'(0)$$

$$(v) \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$$

(ただし ε は微小な正の数。等式は積分の中で意味を持つ。つまり、任意の関数 $f(x)$

に対して $\int dx f(x) \frac{1}{x + i\varepsilon} = \mathcal{P} \int dx f(x) \frac{1}{x} - i\pi \int dx f(x) \delta(x)$ 。 \mathcal{P} は主値積分。)

$$(vi) \int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\text{ヘヴィサイドの階段関数})$$

(i) は $\tilde{\delta}(k) = 1$ を逆フーリエ変換することで

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (3.47)$$

となることからわかる。これは、様々な波数 k の平面波 e^{ikx} を重ね合わせるとき $x = 0$ 以外の点では干渉によって互いに弱め合う ($x = 0$ では強め合う) と考えることができる。

(ii) は定数 $a \neq 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(ax) = |a|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(a^{-1}x) \delta(x) = |a|^{-1} g(0) \quad (3.48)$$

なので、式 (3.41) と比較すれば示される。

(vi) は定義より明らか。

問 3.6. [B] (iii)-(v) を示せ。

第4章 熱伝導方程式

前章でフーリエ変換を学んだので、熱伝導方程式に応用してみよう。熱伝導方程式は以下の偏微分方程式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) \quad (4.1)$$

$u(t, x)$ は時刻 t における温度分布 (\propto 熱分布)、 $\kappa (> 0)$ は熱伝導率 k を比熱 c と密度 ρ で割ったもの ($\kappa = k/c\rho$)。導出については [1] を参照。溶液中の物質の拡散 (ブラウン運動) を記述する拡散方程式とも同じ形。

熱流を $J(t, x) = -\kappa \frac{\partial}{\partial x}u(t, x)$ で定義すると、連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}J(t, x) = 0 \quad (4.2)$$

が成り立つ。熱の総量は保存する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b dx u(t, x) = J(t, a) - J(t, b) \quad (4.3)$$

4.1 初期値問題

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で考えて、初期条件として

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (4.4)$$

を満たす解を構成しよう。式 (4.1) の両辺を x の関数とみてフーリエ変換する。 $u(t, x)$ のフーリエ変換を $\tilde{u}(t, k)$ とおく。すなわち

$$\tilde{u}(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} u(t, x) \quad (4.5)$$

フーリエ変換の性質 (iv) を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(t, k) = -\kappa k^2 \tilde{u}(t, k) \quad (4.6)$$

が得られる。フーリエ変換のおかげで x 微分がなくなったので、 t に関する常微分方程式とみなせる。解は

$$\tilde{u}(t, k) = e^{-\kappa k^2 t} \tilde{u}(0, k) \quad (4.7)$$

である。 $\tilde{u}(0, k)$ は $u(0, x) = u_0(x)$ のフーリエ変換である。 $\tilde{u}(t, k)$ を逆フーリエ変換して、

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\kappa k^2 t} \tilde{u}(0, k) \quad (4.8)$$

が方程式 (4.1) の解である。 $u_0(x)$ を使って表すと

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\kappa k^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} u_0(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy u_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\kappa t(k - i\frac{x-y}{2\kappa t})^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となり、 k 積分はガウス積分なので実行できる。結局

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} u_0(y) \quad (4.10)$$

という解の表式が得られた。各点 y にあった熱が時間とともにガウス分布で拡散していく様子を表している。 $t \rightarrow \infty$ で $u(t, x) \rightarrow 0$ である。

$$K(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \quad (4.11)$$

とおくと、

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy K(t, x - y) u_0(y) \quad (4.12)$$

とも表せる。 $K(t, x)$ を熱伝導方程式 (4.1) の熱核、あるいは基本解とよぶことがある。

$K(t, x)$ は幅 $\sigma = \sqrt{2\kappa t}$ のガウス関数 (3.34) であり、 $t \rightarrow +0$ の極限でデルタ関数に一致

する。

$$\lim_{t \rightarrow +0} K(t, x) = \delta(x) \quad (4.13)$$

$K(t, x)$ は初期条件 $u_0(x) = \delta(x)$ に対する解 $u(t, x)$ に対応している。

ここで得られた一般解の意味は次のようにも説明できる。まず初期条件 $u(0, x) = \delta(x - y)$ に対する解を考えると、 y だけ平行移動すればいいので $u(t, x) = K(t, x - y)$ になる。一般の初期条件 $u_0(x)$ の場合は、デルタ関数 $\delta(x - y)$ を適当な重み ($u_0(y)$) で足し合わせて (積分して) 作ることができる。

$$u_0(x) = \int dy u_0(y) \delta(x - y) \quad (4.14)$$

熱伝導方程式 (4.1) は線形斉次方程式だったので重ね合わせの原理が適用できる。よって一般の初期条件 $u_0(x)$ に対応する解は、同じ重みで基本解を重ね合わせて作ることができる。

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy u_0(y) K(t, x - y) \quad (4.15)$$

例 4.1. 初期条件として以下のもの考える。

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 & -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.16)$$

このとき熱伝導方程式の解は

$$u(t, x) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-L}^L dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} \quad (4.17)$$

となる。この積分はこれ以上簡単にならないが、誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x ds e^{-s^2} \quad (4.18)$$

を使うと

$$u(t, x) = \frac{u_0}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{L-x}{\sqrt{4\kappa t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L+x}{\sqrt{4\kappa t}} \right) \right) \quad (4.19)$$

と表せる。図 4.1 に $u(t, x)$ の時間変化をプロットした。

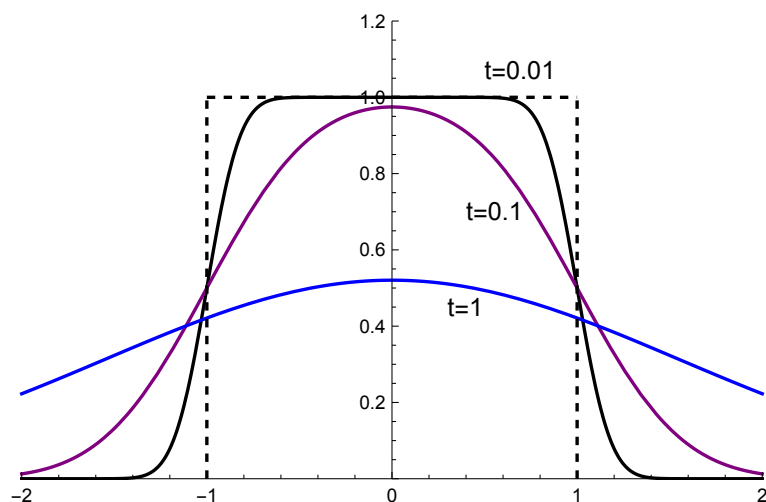


図 4.1: 熱伝導方程式の解 (4.19) をプロットしたもの ($u_0 = L = \kappa = 1$)。

4.2 初期境界値問題

次に境界条件が課されている場合を考えよう。有限区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で考えて、境界条件として

$$u(t, -\pi) = u(t, \pi) = 0 \quad (4.20)$$

を考える。これは両端で温度がゼロに固定されている場合に対応する。初期条件として

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (4.21)$$

をとる。ただし $u_0(\pm\pi) = 0$ とする。

$u(t, x)$ を x の関数とみて実フーリエ級数展開することを考えよう。境界条件を満たすためにはどのような基底関数をとればいだろうか。基底関数として $\sin kx$ の形の場合は

$$\sin \pi k = 0 \quad (4.22)$$

を満たす必要があるので $k = n \in \mathbb{Z}$ である。 $\cos kx$ の形の場合は

$$\cos \pi k = 0 \quad (4.23)$$

を満たす必要があるので $k = n - \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) である。よって

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x + b_n(t) \sin nx \right) \quad (4.24)$$

のようにフーリエ級数展開できる。これは周期 4π の周期関数のフーリエ変換でフーリエ係数の一部をゼロとおいたものと見ることができる。これを熱伝導方程式 (4.1) に代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(a'_n(t) \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x + b'_n(t) \sin nx \right) \\ &= -\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 a_n(t) \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x + n^2 b_n(t) \sin nx \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

となる。各フーリエ係数を比較して

$$a'_n(t) = -\kappa \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 a_n(t) \quad (4.26)$$

$$b'_n(t) = -\kappa n^2 b_n(t) \quad (4.27)$$

となる。これを解くと

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-\kappa \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 t} \quad (4.28)$$

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-\kappa n^2 t} \quad (4.29)$$

である。もとに戻して

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(0) e^{-\kappa \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 t} \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x + b_n(0) e^{-\kappa n^2 t} \sin nx \right) \quad (4.30)$$

を得る。

あとは初期条件 (4.21) を満たすように $a_n(0), b_n(0)$ を決めればよい。三角関数の直交性より

$$a_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx u_0(x) \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \quad (4.31)$$

$$b_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx u_0(x) \sin nx \quad (4.32)$$

となる。これは周期 4π の周期関数 $u_0(x)$ をフーリエ級数展開したときのフーリエ係数とみなせる。ただし、 $u_0(x)$ は $\pi < x < 2\pi$ では

$$u_0(x) := -u_0(2\pi - x) \quad (\pi < x < 2\pi) \quad (4.33)$$

と定義し、 $-2\pi < x < -\pi$ では

$$u_0(x) := -u_0(-2\pi - x) \quad (-2\pi < x < -\pi) \quad (4.34)$$

と定義する。

なぜ周期 2π の周期関数で解を展開しないのかについては付録 B を参照。

問 4.1. [B] 熱伝導方程式 (4.1) を以下の境界条件、初期条件のもとで解け。

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, \pi) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, -\pi) = 0 \quad (4.35)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (4.36)$$

これは、両端 $x = \pm\pi$ で熱の出入りが無いことに対応する。

4.3 熱の発生がある場合

次に物質中で熱の発生がある場合を考えてみよう。そのときの温度分布は以下の偏微分方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + q(x) \quad (4.37)$$

有限区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で考えて、境界条件として $u(t, \pm\pi) = 0$ 、初期条件として $u(0, x) = u_0(x)$ をとる。式 (4.37) は非斉次微分方程式なので、今までのように重ね合わせの原理をそのまま使うことはできない。

一つの方針として、 $t \rightarrow \infty$ の極限で落ち着いた先の温度分布をまず求めよう。

$$u_\infty(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \quad (4.38)$$

$u_\infty(x)$ は熱伝導方程式 (4.37) の定常解なので

$$\kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\infty(x) + q(x) = 0 \quad (4.39)$$

が成り立つ。これを積分すると

$$u_\infty(x) = -\frac{1}{\kappa} \int_{-\pi}^x dy \int_{-\pi}^y dz q(z) + c_1 x + c_2 \quad (4.40)$$

を得る。 c_1, c_2 は積分定数である。境界条件 $u_\infty(\pm\pi) = 0$ を満たすためには、

$$-\frac{1}{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^y dz q(z) + c_1 \pi + c_2 = 0 \quad (4.41)$$

$$-c_1 \pi + c_2 = 0 \quad (4.42)$$

である必要がある。これを解くと

$$c_1 = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^y dz q(z) \quad (4.43)$$

$$c_2 = \frac{1}{2\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^y dz q(z) \quad (4.44)$$

となる。

長時間極限 $u_\infty(x)$ が求まったので、 $u_\infty(x)$ からのずれを

$$v(t, x) := u(t, x) - u_\infty(x) \quad (4.45)$$

と定義すると、 $v(t, x)$ は熱の発生がない熱伝導方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, x) \quad (4.46)$$

$v(t, x)$ に関する境界条件は $v(t, \pm\pi) = 0$ 、初期条件は $v(0, x) = u_0(x) - u_\infty(x)$ である。これは前節で扱った初期境界値問題と同じため、前節と同様の方法で解を求めることができる。

問 4.2. [B] 微分方程式 (4.37) で $q(x) = q_0\delta(x)$ としたものを区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で考えて、境界条件 $u(t, \pm\pi) = 0$ 、初期条件 $u(0, x) = 0$ のもとで解け。

第5章 グリーン関数

微分方程式を解くときに重要なテクニックの一つにグリーン関数がある。グリーン関数は数学的ツールであるだけでなく、物理的にも重要な意味を持つ場合がある。ポアソン方程式を例にグリーン関数の使い方を見てみよう。

5.1 ポアソン方程式

3次元空間ではポアソン方程式は以下の形をしている。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

電磁気では、電荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ が与えられたとき静電ポテンシャル $u(\mathbf{x})$ を決めるガウスの法則としておなじみである。

この方程式を直接解くのではなく、特別な場合として以下の方程式を考える。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.2)$$

これは点 \mathbf{x}_0 に点電荷が置かれている場合に対応する。境界条件として無限遠 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で $u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ となるとして、フーリエ変換を用いて解いてみよう。

$$\tilde{u}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

とおくと、方程式 (5.2) から

$$-k^2 \tilde{u}(\mathbf{k}) = -e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \quad (5.4)$$

が得られる。フーリエ逆変換して $u(\mathbf{x})$ に戻すと

$$u(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \frac{1}{k^2} \quad (5.5)$$

となる。この積分は次のようにして実行できる。 k 空間で北極を $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 方向にとった球座標 (k, θ, ϕ) を考えると、積分は

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\cos\theta} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{2\sin(k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|} \end{aligned} \quad (5.6)$$

と評価される。ここで $\int_{-\infty}^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \pi$ を使った (問3.5を参照)。この結果は、点電荷の作る静電ポテンシャルと確かに一致している。この解を境界条件 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) に対する (ポアソン方程式の) グリーン関数といい、

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (5.7)$$

と表すことにする。

グリーン関数が一旦求めれば、任意の $\rho(\mathbf{x})$ に対して同じ境界条件 $u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) のもとでポアソン方程式 (5.1) を解くことができる。なぜなら

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \quad (5.8)$$

であるので、重み $\rho(\mathbf{x})$ でグリーン関数 $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ を重ね合わせて解を作ればよい。

$$u(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \quad (5.9)$$

より一般の境界条件でも、同様の方法が使える。例えばポアソン方程式 (5.1) を領域 Ω で考えて、ディリクレ条件 $u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega$) が課されているときを考えよう。方程式 (5.2) (ただし $\mathbf{x}_0 \in \Omega$) を境界条件 $u(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega$) のもとで解いて得られるグリーン関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ を重ね合わせて

$$\int_\Omega d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \quad (5.10)$$

を作る。これはポアソン方程式 (5.1) を満たすが、境界条件を満たさない。しかし、ポアソン方程式で $\rho(\boldsymbol{x}) = 0$ としたラプラス方程式

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (5.11)$$

の解を足し合わせる自由度がある。ラプラス方程式の解で境界条件 $u(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) を満たすもの ($u_1(\boldsymbol{x})$ とする) を探してくれば、

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} d^3 \boldsymbol{x}' G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \rho(\boldsymbol{x}') + u_1(\boldsymbol{x}) \quad (5.12)$$

が境界条件を満たすポアソン方程式の解になっている。

式 (5.9) ではラプラス方程式の解を足す必要がなかった。なぜなら境界条件 $u(\boldsymbol{x}) \rightarrow 0$ ($|\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty$) のもとでラプラス方程式の解は $u(\boldsymbol{x}) = 0$ しかないため。

領域 Ω 上で考えて、境界条件 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) を満たすグリーン関数は対称性

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) \quad (5.13)$$

を持つ。これを示すためにグリーンの公式を思い出しておく。

$$\int_{\Omega} d^3 \boldsymbol{x} (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) = \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \cdot (\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1) \quad (5.14)$$

ただし、 $d\boldsymbol{S} = dS \boldsymbol{n}$ で \boldsymbol{n} は面積要素 dS に対する外向き法線ベクトルである。ここで $\phi_1(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1)$, $\phi_2(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \int_{\Omega} d^3 \boldsymbol{x} (G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) \nabla^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) \nabla^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1)) \\ &= \int_{\Omega} d^3 \boldsymbol{x} (-G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2) + G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)) \\ &= -G(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) + G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \cdot (G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1) \nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2) \nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

となって、グリーン関数の対称性 (5.13) が示された。

ここまではポアソン方程式 (5.1) を例にとってグリーン関数を説明してきたが、一般の線形微分演算子 \mathcal{L} に対して

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n) \quad (5.17)$$

という微分方程式を考えても、グリーン関数を適当な境界条件のもとで

$$\mathcal{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.18)$$

の解として定義できる。グリーン関数を用いると (5.17) の解を

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} d^n \mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + u_1(\mathbf{x}) \quad (5.19)$$

のように構成することができる。ただし $u_1(\mathbf{x})$ は $\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = 0$ の解である。

問 5.1. [B] 3次元ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, k > 0) \quad (5.20)$$

に対するグリーン関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ を境界条件 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) のもとで求めよ。

5.2 ラプラス方程式

ポアソン方程式 (5.1) において $\rho(\mathbf{x}) = 0$ としたものをラプラス方程式とよんだ。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.21)$$

境界条件としては $u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \partial\Omega$) を考える。このような境界条件のもとでラプラス方程式の解を求めることをディリクレ問題という。電磁気では、真空中で静電ポテンシャルが満たす方程式に対応する。ラプラス方程式の解を調和関数という。

ラプラス方程式もグリーン関数を用いて解くことができる。(場合によっては変数分離法でも解ける。) 再びグリーンの公式 (5.14) を思い出して、 $\phi_1(\boldsymbol{x})$ としてラプラス方程式の解 $u(\boldsymbol{x})$ で境界条件 $u(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) を満たすものを代入し、 $\phi_2(\boldsymbol{x})$ としてグリーン関数 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ で境界条件 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = 0$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) を満たすものを代入する。

$$\int_{\Omega} d^3\boldsymbol{x} (u(\boldsymbol{x})\nabla^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\nabla^2 u(\boldsymbol{x})) = \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \cdot u_0(\boldsymbol{x})\nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \quad (5.22)$$

$\nabla^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = -\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 、 $\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = 0$ より

$$u(\boldsymbol{x}_0) = - \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S} \cdot u_0(\boldsymbol{x})\nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \quad (5.23)$$

が得られる。変数を置き換えて対称性 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$ を使うと

$$u(\boldsymbol{x}) = - \int_{\partial\Omega} d\boldsymbol{S}' \cdot u_0(\boldsymbol{x}')\nabla' G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \quad (5.24)$$

となる。これが一般のディリクレ境界条件に対するラプラス方程式の解である。

ノイマン境界条件の場合も同様に解を求めることができる (省略)。

例 5.1. ラプラス方程式 (5.21) の解 $u(\boldsymbol{x})$ で境界条件 $u(\boldsymbol{x}) = 0$ ($\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$) を満たすものは $u(\boldsymbol{x}) = 0$ に限られる。これは (5.24) より明らか。物理的には、導体で囲まれた領域では電場が遮蔽されることに対応する。

問 5.2. [B] 2次元空間 \mathbb{R}^2 上でラプラス方程式を考える。

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (\boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

極座標表示 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$) をして変数分離形を仮定することで、一般解を求めよ。

5.3 鏡像法

ポアソン方程式やラプラス方程式を解くための方法としてグリーン関数を紹介したが、任意の与えられた境界条件のもとでグリーン関数を求めることは一般に容易ではない。特別な場合には、うまく対称性を利用することでグリーン関数を解析的に求めることができる。

例として、 $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ となる領域上のグリーン関数を考えよう。境界である xy 平面上で $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ という境界条件をおく。 $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$ ($z_0 > 0$) として一般性を失わない。物理的には xy 平面上に導体があり、点電荷が \mathbf{x}_0 にある状況に対応する。点 \mathbf{x}_0 を xy 平面に対して鏡映の位置に移した点を \mathbf{x}_0^* とする (図 5.1)。 $\mathbf{x}_0^* = (0, 0, -z_0)$ である。このとき

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|} \quad (5.25)$$

とすれば、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ は領域 Ω で式 (5.2) を満たし、境界条件も満足する。このように境界の特性をうまくいかして鏡像を用いて解を構成する方法を鏡像法という。

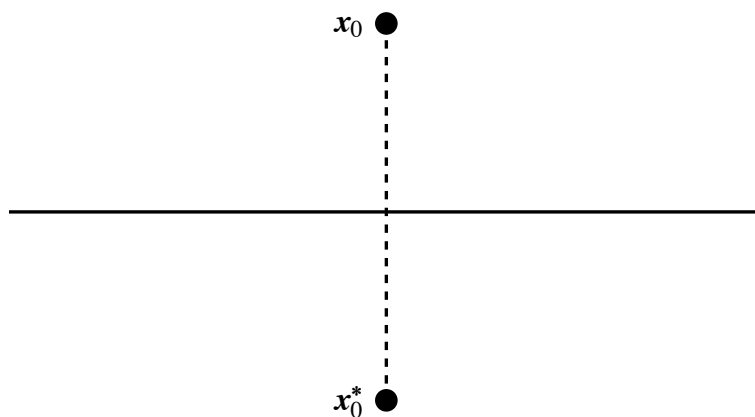


図 5.1: xy 平面に対して鏡映の位置関係にある点電荷。

問 5.3. [B] 領域 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| \leq 1\}$ 上でポアソン方程式のグリーン関数 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ を考える。境界条件は $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = 0$ ($|\boldsymbol{x}| = 1$) とする。グリーン関数は

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x}_0| \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0^*|} \quad (5.26)$$

で与えられることを示せ。ただし $\boldsymbol{x}_0^* = \frac{\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}_0|^2}$ である。

(ヒント: アポロニウスの円)

第6章 ベッセル関数

ラプラス方程式を円柱状の境界のもとで解くときに出てくるのがベッセル関数である。ベッセル関数はそれ以外にも様々な物理現象を記述するのに使われる。

6.1 ベッセルの微分方程式

円柱座標 (ρ, ϕ, z) のもとで、ラプラス方程式 (5.21) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

と表される。常套手段である変数分離形 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ を仮定すると、

$$\rho^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} \right) = -\frac{\Phi''}{\Phi} \quad (6.2)$$

となる。右辺は ϕ の関数、左辺は ρ と z の関数だから両辺定数になるしかなく、その定数を m^2 とおくと、

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{R'}{R} - \frac{m^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z} \quad (6.3)$$

$$\Phi'' = -m^2 \Phi \quad (6.4)$$

したがって $\Phi(\phi) = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi}$ (A, B は定数) であるが、 ϕ に関して 2π で周期的であるべしと要求すると m は整数になる。

式 (6.3) で右辺は z の関数、左辺は ρ の関数だから再び両辺は定数になり、定数を $-a^2$ とおくと、

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (a^2 \rho^2 - m^2) R = 0 \quad (6.5)$$

となる。これはベッセルの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu \in \mathbb{R}) \quad (6.6)$$

で $x = a\rho, y = R, \nu = m$ としたものに等しい。ベッセルの微分方程式は $x = 0$ に確定特異点、 $x = \infty$ に不確定特異点を持つ。

定義 6.1. 確定特異点

微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$ において $x = x_0$ で $P(x)$ が高々1位の極を持ち、かつ $Q(x)$ が高々2位の極を持つとき、 $x = x_0$ を確定特異点という。それ以外の特異点是不確定特異点。

無限遠が(不)確定特異点であるとは、 $z = x^{-1}$ と変数変換して¹ 微分方程式を $\frac{d^2 y}{dz^2} + \tilde{P}(z) \frac{dy}{dz} + \tilde{Q}(z)y = 0$ と書いたとき、 $z = 0$ が(不)確定特異点であることである。

6.2 級数展開

確定特異点のまわりでは微分方程式の解(の少なくとも一つ)を級数展開することができる(フックスの定理)。そこでベッセルの微分方程式(6.6)の解を $x = 0$ のまわりで次のように展開しよう。

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\lambda} \quad (6.7)$$

ここで λ は実数、 $c_0 \neq 0$ 。(6.6)に代入すると

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\lambda)(j+\lambda-1)x^{j+\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (j+\lambda)x^{j+\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\lambda+2} - \nu^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+\lambda} = 0 \quad (6.8)$$

¹変数変換するときに、 $\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = -\frac{1}{x^2} \frac{d}{dz} = -z^2 \frac{d}{dz}$, $\frac{d^2}{dx^2} = z^4 \frac{d^2}{dz^2} + 2z^3 \frac{d}{dz}$ のように微分演算子も変換することを忘れないように。

となる。各項の係数を比較して、

$$\lambda(\lambda - 1)c_0 + \lambda c_0 - \nu^2 c_0 = 0 \quad (j = 0) \quad (6.9)$$

$$(\lambda + 1)\lambda c_1 + (\lambda + 1)c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \quad (j = 1) \quad (6.10)$$

$$(j + \lambda)(j + \lambda - 1)c_j + (j + \lambda)c_j + c_{j-2} - \nu^2 c_j = 0 \quad (j \geq 2) \quad (6.11)$$

が得られる。

$c_0 \neq 0$ と仮定したので、(6.9) より $\lambda = \pm\nu$ であることがわかる。 λ は級数展開の出だしの冪を決める役割があり、特性指数とよばれる。(6.9) のように特性指数を決める方程式は一般に2次方程式になり、決定方程式とよばれる。

(6.10) より $\nu \neq \pm\frac{1}{2}$ ならば $c_1 = 0$ である。実は $\nu = \pm\frac{1}{2}$ のときも $c_1 = 0$ であることがわかるので、以下では $c_1 = 0$ とする。

$\lambda = \nu$ (\neq 負の整数) のとき、(6.11) から係数 c_j について漸化式が得られる。

$$c_j = -\frac{1}{j(2\nu + j)} c_{j-2} \quad (6.12)$$

一つとびに係数が決まっていく。これを繰り返し用いると、

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k) 2^{2k}} c_0 \quad (6.13)$$

となる。また、 $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ である。 c_0 はどのようにとってもいいのだが、慣例で

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad (6.14)$$

と選ぶ。 $\Gamma(z)$ はガンマ関数である。このとき、

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1) 2^{2k+\nu}} \quad (6.15)$$

となる。そこで、ベッセルの微分方程式の解の一つとして、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ を以下で定義する。

定義 6.2. 第 1 種ベッセル関数

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (6.16)$$

この級数は $-\infty < x < \infty$ で絶対収束する。同様にして $J_{-\nu}(x)$ もベッセルの微分方程式の解になっている。 ν が整数でなければ $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は線形独立になり、これで解を尽くしている。図 6.1 にベッセル関数 $J_n(x)$ をいくつかプロットした。 $J_n(x)$ は $x = 0$ 付近で x^n に比例していて、 x が増加すると振動しながらゆっくり減衰していくような関数になっている。

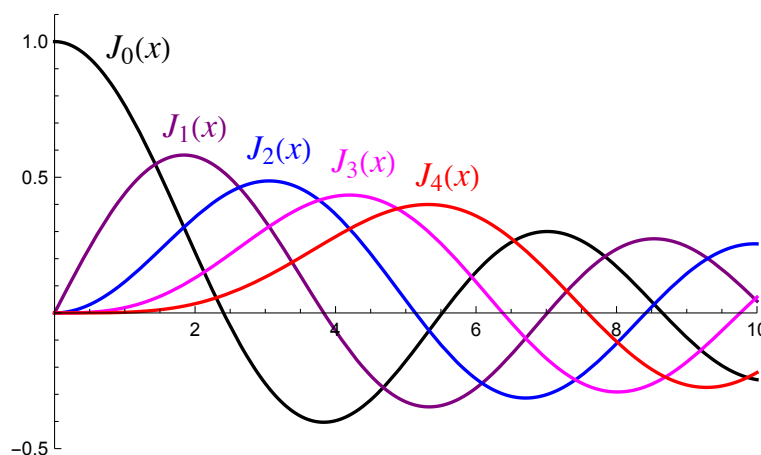


図 6.1: 第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ の概形 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$)。

$J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ の線形結合 (ただし ν は整数でないとする) を適当にとると第 2 種ベッセル関数になる (ノイマン関数ともよばれる)。

定義 6.3. 第 2 種ベッセル関数

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad (6.17)$$

$\nu = n$ (整数) のときは、 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ という関係があり、線形独立ではない。

このときは $J_n(x)$ と独立な解として $Y_n(x) := \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$ を使う。図 6.2 に第2種ベッセル関数 $Y_n(x)$ をいくつかプロットした。 $Y_n(x)$ は $x = 0$ 付近で $n \geq 1$ のとき x^{-n} 、 $n = 0$ のとき $\log x$ に比例して発散する。 x が増加すると振動しながらゆっくり減衰していくような関数になっている。

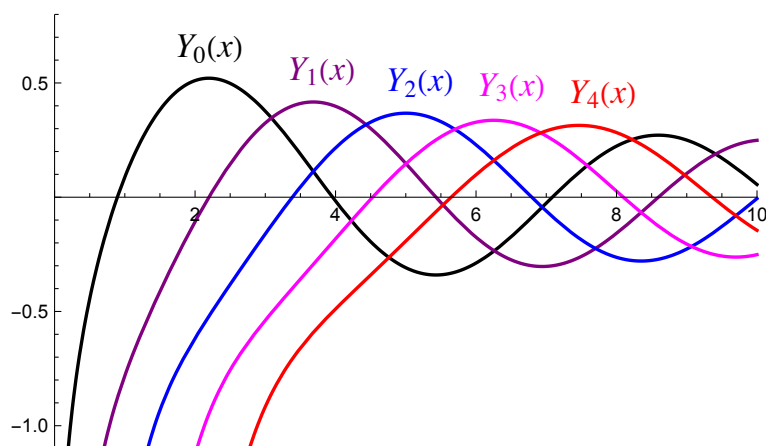


図 6.2: 第2種ベッセル関数 $Y_n(x)$ の概形 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$)。

問 6.1. [A] $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ を示せ。

問 6.2. [B] $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{Y_0(x)}{\log x}$ を求めよ。

6.3 ベッセル関数の諸性質

6.3.1 母関数表示

ベッセル関数 $J_n(z)$ には次の母関数表示がある。

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n \quad (6.18)$$

証明は、左辺をうまくテイラー展開することによって直接的に示される。

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) &= \exp\left(\frac{xz}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2z}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{xz}{2}\right)^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2z}\right)^k \end{aligned} \quad (6.19)$$

$l - k = n$ として z^n の係数を取り出すと

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n}}{m!(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} z^n \quad (m := k+n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n J_{-n}(x)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.3.2 漸化式

式 (6.18) の両辺を z について微分すると、

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x)z^{n-1} \quad (6.21)$$

である。(6.18) を左辺に再び用いて

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x)z^{n-1} \quad (6.22)$$

を得る。これを整理すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(z^{n+1} + z^{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x)z^n \quad (6.23)$$

となるので、 z^n の係数を比較することでベッセル関数の漸化式

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad (6.24)$$

が導かれた。

問 6.3. [A] ベッセル関数は以下の漸化式を満たすことを示せ。

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \quad (6.25)$$

問 6.4. [A] ベッセル関数は以下の加法公式を満たすことを示せ。

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \quad (6.26)$$

6.3.3 積分表示

母関数表示 (6.18) において $z = e^{i\theta}$ とおくと、

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad (6.27)$$

となる。両辺に $e^{-in\theta}$ をかけて θ に関して 0 から 2π まで積分すると、ベッセル関数 $J_n(z)$ の積分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix \sin \theta - in\theta} \quad (6.28)$$

を得る。

あるいは (6.18) の両辺に z^{-n-1} をかけて $z = 0$ を囲む円周上で複素積分すると、留数定理よりシュレーフリ (Schräfli) の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) z^{-n-1} \quad (6.29)$$

を得る。

6.3.4 漸近形

積分表示を用いると、ベッセル関数 $J_n(x)$ の $x \rightarrow \infty$ での漸近的な振る舞いを求めることができる。そのために鞍点法を使うので、付録 C にまとめておいた。

式 (C.1) で $s = x$, $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $g(z) = \frac{1}{2\pi i} z^{-n-1}$ とする。 $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)$ より、鞍点は $z_0 = \pm i$ である。

$z_0 = +i$ の近傍で $f(z)$ は

$$f(z) - f(z_0) = -\frac{i}{2}(z - z_0)^2 + \dots \quad (6.30)$$

と展開される。 $z - z_0 = re^{i\theta}$ とおくと

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2}r^2 e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})} + \dots \quad (6.31)$$

であるので、 $2\theta - \frac{\pi}{2} = \pi$ 、すなわち $\theta = \frac{3\pi}{4}$ のときに最急降下 (steepest descent) する (図 6.3)。このとき $z_0 = +i$ の近傍からの寄与は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{ix - \frac{\pi}{2}r^2} i^{-n-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4}(2n+1))} \quad (6.32)$$

と評価される。

同様にして、 $z_0 = -i$ の近傍で $f(z)$ は

$$f(z) - f(z_0) = +\frac{i}{2}(z - z_0)^2 + \dots \quad (6.33)$$

と展開される。 $z - z_0 = re^{i\theta}$ とおくと

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2}r^2 e^{i(2\theta + \frac{\pi}{2})} + \dots \quad (6.34)$$

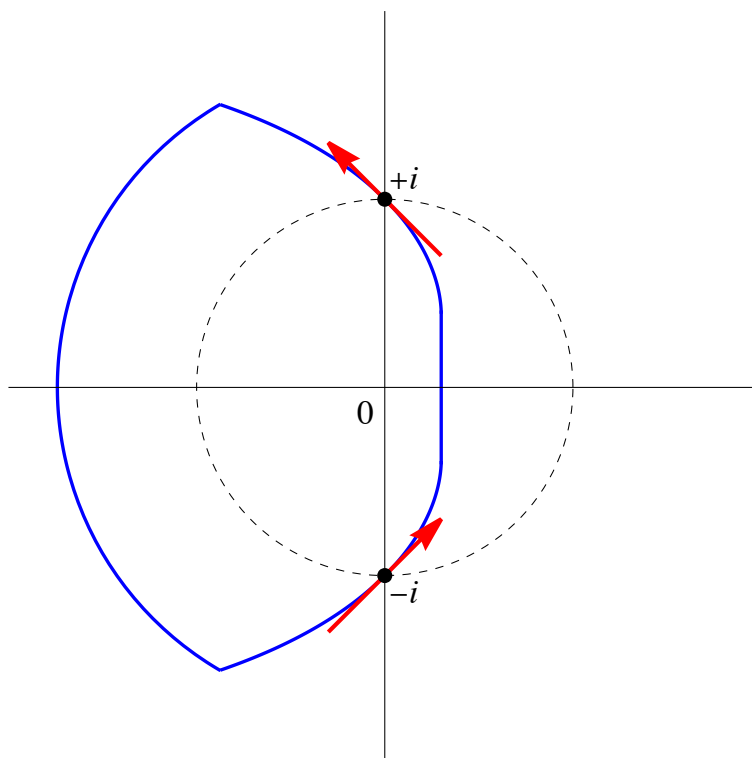


図 6.3: 鞍点 ($z = \pm i$) 近傍で最急降下するように変形された積分経路。

であるので、 $2\theta + \frac{\pi}{2} = \pi$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときに最急降下する。このとき $z_0 = -i$ の近傍からの寄与は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ix - \frac{\pi}{2}r^2} (-i)^{-n-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4}(2n+1))} \quad (6.35)$$

と評価される。両者の寄与を足し合わせることで、ベッセル関数の漸近形

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}(2n+1)\right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (6.36)$$

が得られた。

6.3.5 直交性

ベッセル関数は以下の直交性を満たす。

$$\int_0^1 dx x J_\nu(\alpha_m x) J_\nu(\alpha_n x) = \frac{1}{2} J_{\nu+1}(\alpha_n)^2 \delta_{m,n} \quad (6.37)$$

ここで α_n は $J_\nu(x)$ の n 番目の正の零点を表す。

式 (6.37) を示すために、 $u := J_\nu(\alpha_m x)$ と $v := J_\nu(\alpha_n x)$ の満たす微分方程式を考える。

$$x^2 u'' + x u' + (\alpha_m^2 x^2 - \nu^2) u = 0 \quad (6.38)$$

$$x^2 v'' + x v' + (\alpha_n^2 x^2 - \nu^2) v = 0 \quad (6.39)$$

(6.38) $\times \frac{v}{x}$ - (6.39) $\times \frac{u}{x}$ とすると

$$(x(vu' - uv'))' + (\alpha_m^2 - \alpha_n^2)xuv = 0 \quad (6.40)$$

を得る。これを 0 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned} (\alpha_m^2 - \alpha_n^2) \int_0^1 dx x J_\nu(\alpha_m x) J_\nu(\alpha_n x) &= \int_0^1 dx \frac{d}{dx} (x(vu' - uv')) \\ &= x(vu' - uv') \Big|_0^1 \\ &= x(\alpha_m J_\nu(\alpha_n x) J'_\nu(\alpha_m x) - \alpha_n J_\nu(\alpha_m x) J'_\nu(\alpha_n x)) \Big|_0^1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

である。よって $m \neq n$ ならば (6.37) の左辺 = 0 である。 $m = n$ の場合は [1] の Sec. 4.3 を参照。

ベッセル関数の直交性 (6.37) を利用すると、区間 $(0, 1)$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\alpha_n x), \quad c_n = \frac{2}{J_{\nu+1}(\alpha_n)^2} \int_0^1 dx x f(x) J_\nu(\alpha_n x) \quad (6.42)$$

のように展開できる (フーリエ・ベッセル級数)。

6.4 関連する諸関数

第 1 種と第 2 種ベッセル関数 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ の線形結合をとると、ハンケル (Hankel) 関数とよばれるものになる。

$$H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad (6.43)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (6.44)$$

ベッセル関数の引数 x を ix に置き換えたものを考えると変形ベッセル関数になる。

$$I_\nu(x) := i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (6.45)$$

$$K_\nu(x) := \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin(\pi\nu)} \quad (6.46)$$

変形ベッセル関数は以下の微分方程式の独立した二つの解になっている。

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (6.47)$$

ベッセル関数の引数 ν を $\frac{1}{2}$ だけずらしたようなものを考えると球ベッセル関数になる。

$$j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (6.48)$$

$$y_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (6.49)$$

球ベッセル関数は以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) y = 0 \quad (6.50)$$

量子力学で、自由粒子に対するシュレディンガー方程式を球座標で考えると出てくる。球ベッセル関数は初等関数で表せる場合がある。例えば

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (6.51)$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad (6.52)$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2} \quad (6.53)$$

など。

問 6.5. [A] $j_0(x)$ が (6.51) で与えられることを確認せよ。

第7章 直交多項式

物理で遭遇する微分方程式の中には多項式が解になるような場合がある。そのような場合についてみていこう。最初に具体例としてルジャンドル多項式を取り上げ、その後まとめて一般論を説明する。最後に他の具体例を再び取り上げる。

7.1 ルジャンドル多項式

7.1.1 ルジャンドルの微分方程式

ルジャンドル多項式は、例えばラプラス方程式を球座標で解くときに現れる。球座標表示の具体的な計算は第9章でやることにして、以下のルジャンドルの微分方程式を考えよう。

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad (7.1)$$

問 7.1. [A] ルジャンドルの微分方程式 (7.1) は $x = \pm 1, \infty$ に確定特異点を持つことを示せ。

ここでは $x = 1$ のまわりで解を級数展開してみよう。 ($a_0 \neq 0$)

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - 1)^{j+\rho} \quad (7.2)$$

微分方程式 (7.1) に代入すると

$$(1-x^2) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+\rho)(j+\rho-1)(x-1)^{j+\rho-2} - 2x \sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+\rho)(x-1)^{j+\rho-1} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-1)^{j+\rho} = 0 \quad (7.3)$$

となる。少し整理すると

$$-\sum_{j=0}^{\infty} a_j((j+\rho)(j+\rho+1)-\lambda)(x-1)^{j+\rho} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j(j+\rho)^2(x-1)^{j+\rho-1} = 0 \quad (7.4)$$

であるが、 $(x-1)^{\rho-1}$ の係数を比較すると $\rho=0$ が得られる。 $(x-1)^j$ ($j \geq 0$) の係数を比較すると

$$a_{j+1} = -\frac{j(j+1)-\lambda}{2(j+1)^2} a_j \quad (7.5)$$

が成り立つことがわかる。

$\lambda = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のときは $a_{n+1} = 0$ になる。さらに漸化式より $a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = 0$ がわかる。すなわち、このときは微分方程式 (7.1) の解 (の一つ) は n 次の多項式になる。係数を求めておくと

$$a_j = \frac{1}{2^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(n+k+1)(n-k)}{(k+1)^2} a_0 = \frac{(n+j)!}{2^j(j!)^2(n-j)!} a_0 \quad (7.6)$$

である。 $x=1$ のとき $y = a_0 = 1$ と規格化するとルジャンドル多項式の定義となる。

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{2^j(j!)^2(n-j)!} (x-1)^j \quad (7.7)$$

問 7.2. [B] ルジャンドル多項式は以下のように表せることを示せ。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (7.8)$$

ただし $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ は $\frac{n}{2}$ を超えない最大の整数を表す。

具体的にいくつか書き下してみる。

$$P_0(x) = 1 \quad (7.9)$$

$$P_1(x) = x \quad (7.10)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (7.11)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (7.12)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (7.13)$$

一般に n が偶数なら $P_n(x)$ は偶数次のみ、奇数なら奇数次のみの多項式になる。後で説明するように、ルジャンドル多項式にとって区間 $[-1, 1]$ が特別な意味を持つ。図 7.1 にその区間でルジャンドル多項式の概形をプロットした。

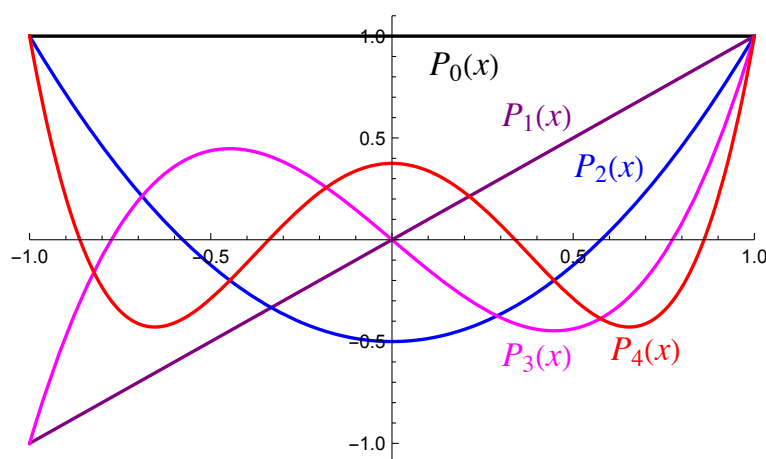


図 7.1: ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ の概形 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$)。

7.1.2 ロドリゲスの公式

ルジャンドル多項式に対してロドリゲス (Rodrigues) の公式というとても便利な表式が知られている。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (7.14)$$

証明は $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n ((x - 1) + 2)^n$ と変形して $((x - 1) + 2)^n$ を二項展開すると示せる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x - 1)^n ((x - 1) + 2)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{j=0}^n 2^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{d^n}{dx^n} (x - 1)^{n+j} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j j!(n-j)!} \frac{(n+j)!}{j!} (x - 1)^j = P_n(x) \end{aligned} \quad (7.15)$$

この表式からルジャンドル多項式の様々な性質を導くことができる。

7.1.3 直交性

ルジャンドル多項式は以下のような直交関係を満たす。

$$\int_{-1}^1 dx P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n} \quad (7.16)$$

証明はロドリゲスの公式を利用する。 $m \leq n$ として一般性を失わない。 $m < n$ のとき、部分積分をして

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_m(x) P_n(x) &\propto \int_{-1}^1 dx P_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \\ &= P_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \frac{d}{dx} P_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \end{aligned} \quad (7.17)$$

であるが、初項は $(x^2 - 1)^n$ を $(n - 1)$ 回微分すると必ず $(x^2 - 1)$ の因子が一つは残るので $x = \pm 1$ を代入するとゼロになる。同様に部分積分を繰り返すことで

$$\int_{-1}^1 dx P_m(x) P_n(x) \propto \int_{-1}^1 dx \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \cdot (x^2 - 1)^n \quad (7.18)$$

となり、 m 次多項式 $P_m(x)$ を $n (> m)$ 回微分すると消えるので

$$\int_{-1}^1 dx P_m(x) P_n(x) = 0 \quad (m < n) \quad (7.19)$$

がいえた。

問 7.3. [A] 残りの $m = n$ の場合、すなわち

$$\int_{-1}^1 dx (P_n(x))^2 = \frac{2}{2n+1} \quad (7.20)$$

を示せ。

直交関係 (7.16) は、区間 $[-1, 1]$ で定義された多項式が作るベクトル空間 V に内積

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 dx f(x)g(x) \quad (f, g \in V) \quad (7.21)$$

を入れた内積空間において、 $\{P_n(x)\}_n$ が直交基底となっていることを意味する。

7.1.4 積分表示

ルジャンドル多項式の積分表示を得るために、グルサ (Goursat) の積分公式を思い出す。

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} \quad (7.22)$$

ここで積分経路は x を囲むようにしており、経路の内部では $f(z)$ は正則とする。これをロドリゲスの公式 (7.14) に当てはめれば、ルジャンドル多項式に対するシュレーフリの積分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \quad (7.23)$$

が得られる。

7.1.5 母関数

ルジャンドル多項式には以下のような母関数表示がある。

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (7.24)$$

これを積分表示 (7.23) を使って示してみよう。|t| が十分小さいときに、式 (7.24) の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} t^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{z-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z^2-1)t}{2(z-x)} \right)^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{1}{z-x-\frac{1}{2}(z^2-1)t} \end{aligned} \quad (7.25)$$

と変形できる。被積分関数の分母がゼロになるところを求めると、

$$tz^2 - 2z + 2x - t = 0 \quad (7.26)$$

より解は

$$z_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}}{t} \quad (7.27)$$

である。|t| が十分小さいとき z_- は x に近づき z_+ は x から遠ざかる。|t| が十分小さいときは z_- のみが積分経路の中に入っているから、 $z = z_-$ での留数を拾って

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \frac{1}{2\pi i} \frac{2}{t} \oint dz \frac{1}{(z_+ - z)(z - z_-)} \\ &= \frac{2}{t} \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \end{aligned} \quad (7.28)$$

となる。

例 7.1. 電荷分布 $\rho(r)$ が作る静電ポテンシャルは (5.9) より

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (7.29)$$

で与えられる。ここで $|\mathbf{x}| = x$ 、 $|\mathbf{x}'| = x'$ 、ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{x}' のなす角を θ とすると、

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xx' \cos \theta + x'^2}} \quad (7.30)$$

である。電荷が分布する領域より十分遠方 ($x \gg x'$) では、母関数表示 (7.24) より

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{x\sqrt{1 - 2(x'/x) \cos \theta + (x'/x)^2}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (7.31)$$

と展開される。これを (7.29) に代入すると

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} \int d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \left(\frac{x'}{x}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (7.32)$$

となる。これは多極子展開になっている。実際、

$$q := \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \quad (7.33)$$

$$\mathbf{p} := \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \quad (7.34)$$

$$Q_{ij} := \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (3x_i x_j - \delta_{ij} |\mathbf{x}|^2) \rho(\mathbf{x}) \quad (7.35)$$

をそれぞれ全電荷、双極子モーメント、4極子モーメントとおくと、(7.32) は

$$u(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{4\pi x^3} + \sum_{ij} \frac{Q_{ij} x_i x_j}{4\pi x^5} + \dots \quad (7.36)$$

に一致する。

7.1.6 漸化式

ベッセル関数のところでもやったように、母関数表示を微分していくとルジャンドル多項式が満たす漸化式を導出できる。

式 (7.24) の両辺を t で微分すると

$$-\frac{-2x + 2t}{2(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} \quad (7.37)$$

である。式(7.24)を再び使うと

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nt^{n-1} \quad (7.38)$$

を得る。少し整理すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} (P_{n+1}(x)(n+1)t^n - x(2n+1)P_n(x)t^n + P_n(x)(n+1)t^{n+1}) = 0 \quad (7.39)$$

となる。 t^n ($n \geq 1$)の係数を比較して、ルジャンドル多項式が満たす漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (7.40)$$

が得られた。

問 7.4. [A] ルジャンドル多項式が次の漸化式を満たすことを示せ。

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \quad (n \geq 0) \quad (7.41)$$

7.1.7 ルジャンドル陪関数

微分方程式を満たすような多項式があると、その多項式を微分したのも何らかの微分方程式の解になっていることが予想される。これをルジャンドル多項式の場合に確かめてみよう。

式(7.1)の両辺を x で m 回微分する。ライプニッツ則 $(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^m {}_m C_k f^{(k)} g^{(m-k)}$ を使うと

$$\frac{d^m}{dx^m} \left((1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = (1-x^2) \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} + m(-2x) \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + \frac{m(m-1)}{2} (-2) \frac{d^m y}{dx^m} \quad (7.42)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = x \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + m \frac{d^m y}{dx^m} \quad (7.43)$$

であるので、

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (n(n+1) - m(m+1))\frac{d^m y}{dx^m} = 0 \quad (7.44)$$

が得られる。よって $y = \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ は以下の微分方程式を満たすことがわかった。

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dy}{dx} + (n(n+1) - m(m+1))y = 0 \quad (7.45)$$

ルジャンドルの陪関数は $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ をもとに

$$P_n^m(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (0 \leq m \leq n) \quad (7.46)$$

のように定義される。 $P_n^m(x)$ は m が奇数のときは多項式にならないことに注意。第9章の球面調和関数のところで出てくる。

ルジャンドル陪関数は以下の微分方程式を満たす。

$$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \quad (7.47)$$

問 7.5. [A] $P_n^m(x)$ が式 (7.47) を満たすことを示せ。

ルジャンドル陪関数は以下の直交性を満たす。

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_n^m(x) = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \delta_{l,n} \quad (7.48)$$

7.2 古典直交多項式

前節ではルジャンドルの微分方程式 (7.1) が多項式解を持つ場合があることを見た。これをもう少し一般化した状況を考えよう。多項式の列 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$ (ただし $y_n(x)$ は n 次多項式) が以下の微分方程式を満たしているとする。

	ヤコビ多項式	ラゲール多項式	エルミート多項式
区間	$[-1, 1]$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$w(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
ロドリゲスの公式	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \times \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n\}$	$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{1}{x^\alpha e^{-x}} \times \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$	$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{e^{-x^2}} \times \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$
$Q(x)$	$1-x^2$	x	1
$R(x)$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$\alpha + 1 - x$	$-2x$
λ_n	$n(n + \alpha + \beta + 1)$	n	$2n$

表 7.1: 古典直交多項式系の分類。 $w(x)$ は内積を定義するときの重み。 $Q(x), R(x), \lambda = \lambda_n$ は多項式が満たす微分方程式 (7.49) の係数。ルジャンドル多項式はヤコビ多項式の特別な場合 ($\alpha = \beta = 0$) に対応する。定義域として区間 $[a, b]$ 以外に $|x| = 1$ ($x \in \mathbb{C}$) という場合を考えてベッセルの多項式を含めることもある。

$$Q(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + R(x) \frac{dy}{dx} + S(x)y + \lambda y = 0 \tag{7.49}$$

ここで $Q(x), R(x), S(x)$ は n によらないとし、 λ のみ n によるとする ($\lambda = \lambda_n$)。このような方程式をスツルム・リウビル型微分方程式といい、 λ_n は微分演算子の固有値とみなせる (詳しくは第 10 章参照)。実はスツルム・リウビル型微分方程式の解となるような多項式列は本質的に古典直交多項式系と呼ばれる多項式の一群に限られる (Bochner の定理 [8])。表 7.1 に古典直交多項式系の分類をまとめた。

ここで直交多項式系を定義しておく。区間 $[a, b]$ 、重み $w(x)$ をあらかじめ選んで固定しておく。 a は $-\infty$ 、 b は $+\infty$ でもよい。

定義 7.1. 直交多項式系

多項式の列 $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ が与えられていて、 $P_n(x)$ ($\neq 0$) は n 次多項式とする。ある重み $w(x)$ に関して多項式の内積が $\langle f, g \rangle := \int_a^b dx w(x) f(x) g(x)$ で定義されているとする。このとき $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ ($m \neq n$) ならば $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ を直交多項式系という。

多項式列が (7.49) の解になっていることから以下がすぐにわかる。まず y_0 (定数) を (7.49) に代入すると $S(x)y_0 + \lambda_0 y_0 = 0$ 。よって $S(x) = -\lambda_0$ 、すなわち $S(x)$ は定数なので最初から λ に含めることができる。次に y_1 (1次式) を (7.49) に代入すると $R(x)y_1' + \lambda y_1 = 0$ 。よって $R(x) = -\lambda y_1'/y_1'$ 、すなわち $R(x)$ は高々1次の多項式。 y_2 (2次式) を (7.49) に代入すると $Q(x)y_2'' + R(x)y_2' + \lambda y_2 = 0$ 。よって $Q(x) = -(R(x)y_2' + \lambda y_2)/y_2''$ 、すなわち $Q(x)$ は高々2次の多項式。

以下では $Q(x)$ を高々2次の多項式、 $R(x)$ を高々1次の多項式、 $S(x) = 0$ として、なぜ微分方程式 (7.49) を満たす多項式は古典直交多項式系に限られるのかを説明する。ここでの議論は [7] に従った。

7.2.1 一般化されたロドリゲスの公式

まず、ある n 次多項式 $y = y_n(x)$ が (7.49) を満たしているとしよう。

$$Q(x)y_n'' + R(x)y_n' + \lambda y_n = 0 \quad (7.50)$$

y_n を m 回微分した $y_n^{(m)}$ ($0 \leq m \leq n$) は以下の微分方程式を満たす。

$$Q(x)y_n^{(m)''} + R_m(x)y_n^{(m)'} + \mu_m y_n^{(m)} = 0 \quad (7.51)$$

ここで

$$R_m(x) := R(x) + mQ'(x) \quad (7.52)$$

$$\mu_m := \lambda + mR'(x) + \frac{m(m-1)}{2}Q''(x) \quad (7.53)$$

と定義した。これは (7.50) を m 回微分することで確かめられる。 $R_m(x)$ は高々1次の多項式、 μ_m は定数であることに注意。

n 次多項式を n 回微分するとゼロではない定数になる。すなわち $y_n^{(n)} = \text{const.} \neq 0$ が (7.51) の解になっていないといけない。そのためには $\mu_n = 0$ である必要がある。つまり

多項式解が存在するためには λ は特定の値、

$$\lambda = \lambda_n := -nR'(x) - \frac{n(n-1)}{2}Q''(x) \quad (7.54)$$

をとる必要がある。ここからは $\lambda = \lambda_n$ として話を進める。

天下りではあるが、以下の微分方程式を満たす関数 $w_m(x)$ を導入しよう。

$$(Q(x)w_m(x))' = R_m(x)w_m(x) \quad (7.55)$$

特に $w_0(x) = w(x)$ と表すことにする。このような $w_m(x)$ を用いると、(7.51) は次のように書きかえることができる。

$$(Q(x)w_m(x)y_n^{(m)})' + \mu_m w_m(x)y_n^{(m)} = 0 \quad (7.56)$$

(7.55) より

$$\frac{(Q(x)w_m(x))'}{w_m(x)} = R_m(x) = R(x) + mQ'(x) \quad (7.57)$$

$$\frac{(Q(x)w(x))'}{w(x)} = R(x) \quad (7.58)$$

が成り立つので、

$$\frac{(Q(x)w_m(x))'}{w_m(x)} = \frac{(Q(x)w(x))'}{w(x)} + mQ'(x) \quad (7.59)$$

すなわち

$$\frac{w_m'(x)}{w_m(x)} = \frac{w(x)'}{w(x)} + m \frac{Q'(x)}{Q(x)} \quad (7.60)$$

が得られる。この微分方程式を解くと

$$w_m(x) = Q(x)^m w(x) \quad (7.61)$$

という関係が導かれる¹。 $Q(x)w_m(x) = w_{m+1}(x)$ 、 $y_n^{(m)'} = y_n^{(m+1)}$ であることを使うと、式 (7.56) は

$$w_m(x)y_n^{(m)} = -\frac{1}{\mu_m}(w_{m+1}(x)y_n^{(m+1)})' \quad (7.62)$$

¹右辺の係数はどのように選んでもいいが、ここでは 1 とした。

と変形できる。この関係を繰り返し用いることで、

$$\begin{aligned}
 w(x)y_n &= -\frac{1}{\mu_0}(w_1(x)y_n^{(1)})' \\
 &= -\frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{\mu_1}(w_2(x)y_n^{(2)})'\right)' \\
 &= \dots \\
 &= (-1)^n \left(\prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{d^n}{dx^n}(w_n(x)y_n^{(n)})
 \end{aligned} \tag{7.63}$$

という関係が得られる。 $y_n^{(n)}$ は定数であったので定数をまとめて C_n と書くことにすると、結局 n 次多項式の解は

$$y_n = \frac{C_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n}(Q(x)^n w(x)) \tag{7.64}$$

と表されることがわかった。この表式を一般化されたロドリゲスの公式という。これはルジャンドル多項式のところで出てきたロドリゲスの公式を一般化したものに対応する。ルジャンドル多項式の場合は $w(x) = 1$ 、 $Q(x) = 1 - x^2$ 、 $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ となる。

7.2.2 直交性

式 (7.64) で与えられる $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が直交多項式系になるための条件を見ておく。多項式同士の内積を次のように定義する。

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b dx w(x) f(x) g(x) \tag{7.65}$$

ここで $w(x)$ は内積の重みを表す。 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が直交多項式系になるためには $\langle y_m, y_n \rangle = 0$ ($m < n$) が成り立てばよい。ルジャンドル多項式のと看同様に部分積分していく。

$$\begin{aligned} \langle y_m, y_n \rangle &= \int_a^b dx w(x) y_m \frac{C_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (Q(x)^n w(x)) \\ &\propto \int_a^b dx y_m \frac{d^n}{dx^n} (Q(x)^n w(x)) \\ &= y_m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (Q(x)^n w(x)) \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{dy_m}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (Q(x)^n w(x)) \end{aligned} \quad (7.66)$$

ここで (7.63) の議論を思い出すと、

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (Q(x)^n w(x)) \propto w_1(x) y_n^{(1)} \propto Q(x) w(x) y_n^{(1)} \quad (7.67)$$

であるので

$$Q(x) w(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow a, b) \quad (7.68)$$

であれば境界項は消える²。以下同様に部分積分を繰り返して、条件 (7.68) を仮定すれば境界項は全て消えることがわかる。従って

$$\langle y_m, y_n \rangle \propto \int_a^b dx \frac{d^n y_m}{dx^n} Q(x)^n w(x) = 0 \quad (m < n) \quad (7.69)$$

が言える (m 次多項式を $n (> m)$ 回微分すると消える)。このことから (7.68) が $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が直交多項式系になるための十分条件であることがわかった。

7.2.3 三つの多項式系列

重み $w(x)$ は次の微分方程式を満たすものであった ((7.55) を参照)。

$$(Q(x)w(x))' = R(x)w(x) \quad (7.70)$$

この微分方程式を実際に解くことで、可能な多項式系列を分類することができる。

² $a = -\infty, b = +\infty$ のときはもう少し強い条件が必要で、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $x^n Q(x)w(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a, b$) とする。

(7.70) を変形すると

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{R(x) - Q'(x)}{Q(x)} = \frac{\text{(高々1次の多項式)}}{\text{(高々2次の多項式)}} \quad (7.71)$$

となる。分母の $Q(x)$ が何次の多項式かで次のように (定数倍の違いを除いて) 場合分けできる。

(i) $Q(x) = (b-x)(x-a)$

(ii) $Q(x) = x-a$

(iii) $Q(x) = 1$

それぞれに対して微分方程式 (7.71) を解くことで $w(x)$ の形を特定できる。

(i) $w(x) = (b-x)^\alpha(x-a)^\beta$

(ii) $w(x) = (x-a)^\alpha e^{\beta x}$

(iii) $w(x) = e^{\alpha x^2 + \beta x}$

ここで a, b, α, β は一般に複素数。 $a \neq b$ と仮定しておく。線形変換 $x \rightarrow x' = cx + d$ ($c, d \in \mathbb{C}, c \neq 0$) をすることで $Q(x), w(x)$ は以下の形に帰着することができる。

(i) $Q(x) = 1 - x^2, w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

(ii) $Q(x) = x, w(x) = x^\alpha e^{-x}$

(iii) $Q(x) = 1, w(x) = e^{-x^2}$

線形変換のもとで多項式解は同じ次数の多項式解に移ることに注意。新しい変数のもとでロドリゲスの公式 (7.64) も成り立つ。

こうして多項式の三系列が得られた。(i) の場合はヤコビ (Jacobi) の多項式とよばれる。

ロドリゲスの公式 (7.64) を用いて以下のように定義される。

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n) \quad (7.72)$$

ヤコビ多項式は次の微分方程式の解になっている。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\frac{dy}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (7.73)$$

直交性を満たすためには、条件 (7.68) より区間 $[a, b]$ を $a = -1, b = 1$ と選び、 $\alpha, \beta > -1$ とする。このとき

$$\int_{-1}^1 dx (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.74)$$

が成り立つ。 $\alpha = \beta = 0$ の場合がルジャンドル多項式に対応する。

例 7.2. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ のとき、チェビシエフ (Chebyshev) 多項式とよばれる。

$$T_n(x) := \frac{2^n n!}{(2n-1)!!} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) \quad (7.75)$$

具体的に書き下すと、

$$T_0(x) = 1 \quad (7.76)$$

$$T_1(x) = x \quad (7.77)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (7.78)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \quad (7.79)$$

である。実はチェビシエフ多項式はコサインの n 倍角の公式そのものである。

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad (7.80)$$

問 7.6. [B] (7.80) を示せ。

(ii) の場合はラゲール (Laguerre) の (陪) 多項式とよばれる。ロドリゲスの公式 (7.64) を用いて以下のように定義される。

$$L_n^{(\alpha)}(x) := \frac{1}{n!} \frac{1}{x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (x^\alpha e^{-x} x^n) \quad (7.81)$$

$L_n^{(\alpha)}$ の (α) は微分記号ではないことに注意。文献によっては係数が異なることがあるので

注意。ラゲール多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ は次の微分方程式の解である。

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (7.82)$$

直交性を満たすためには、条件 (7.68) より区間 $[a, b]$ を $a = 0, b = +\infty$ と選び、 $\alpha > -1$ とする。このとき

$$\int_0^\infty dx x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.83)$$

が成り立つ。

最後に (iii) の場合はエルミート (Hermite) の多項式とよばれる。ロドリゲスの公式 (7.64) を用いて以下のように定義される。

$$H_n(x) := (-1)^n \frac{1}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (7.84)$$

エルミート多項式は次の微分方程式の解になっている。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (7.85)$$

直交性を満たすためには、条件 (7.68) より区間 $[a, b]$ を $a = -\infty, b = +\infty$ と選ぶ。

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.86)$$

(i) で $Q(x)$ が 2 次式で重根を持つ場合、すなわち $Q(x) = (x - a)^2$ となる場合を除外してきた。この場合はベッセルの多項式というものになることが知られている [7]。ベッセル多項式は第 6 章で扱ったベッセル関数そのものではないことに注意。

7.3 ラゲール多項式

ラゲール多項式は水素原子のシュレディンガー方程式を解くときに出てくる。この節ではラゲール多項式について詳しく見ていく。

ラゲール多項式の定義は (7.81) で与えたが、特に $\alpha = 0$ としたものをラゲール多項式とよぶことが多い。物理の文献では係数 $\frac{1}{n!}$ をつけない定義がよく用いられる ($L_n(x) = n!L_n^{(0)}(x)$)。

$$L_n(x) := \frac{1}{e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (7.87)$$

具体的にいくつか書き下してみると以下のようなになる。

$$L_0(x) = 1 \quad (7.88)$$

$$L_1(x) = -x + 1 \quad (7.89)$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2 \quad (7.90)$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \quad (7.91)$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \quad (7.92)$$

図 7.2 にラゲール多項式の概形をプロットした。

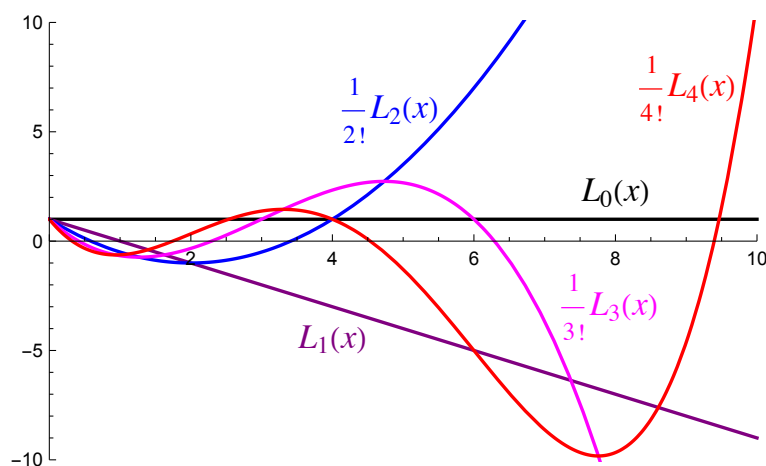


図 7.2: ラゲール多項式 $\frac{1}{n!}L_n(x)$ の概形 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$)。

ラゲール多項式は以下の微分方程式を満たす ((7.82) 参照)。

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \nu y = 0 \quad (\nu = n) \quad (7.93)$$

$x = 0$ に確定特異点、 $x = \infty$ に不確定特異点をもつ。 $\nu \neq n$ のときは解は $x \rightarrow +\infty$ で $y \sim e^x \rightarrow \infty$ のように発散する。

7.3.1 直交性

ラゲール多項式は以下の直交関係を満たす。

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} L_m(x) L_n(x) = (n!)^2 \delta_{m,n} \quad (7.94)$$

$m \neq n$ の場合は (7.83) で確認した。

問 7.7. [A] $m = n$ のときに (7.94) を示せ。

7.3.2 積分表示

グルサの積分公式 (7.22) をロドリゲスの表式 (7.87) に当てはめれば、ラゲール多項式に対するシュレーフリの積分表示が得られる。

$$L_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} e^x \oint dz \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} \quad (7.95)$$

ここで積分経路は x を囲むようにとっている。

7.3.3 母関数表示

ラゲール多項式には次の母関数表示がある。

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(x) t^n \quad (7.96)$$

ルジャンドル多項式のときと同じく、積分表示 (7.95) から導くことができる。 $|t|$ が十分

小さいと仮定して

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^x}{2\pi i} \oint dz \frac{t^n z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} \\ &= \frac{e^x}{2\pi i} \oint dz \frac{e^{-z}}{z-x-tz} \\ &= \frac{e^x}{1-t} e^{-\frac{x}{1-t}} = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \end{aligned} \quad (7.97)$$

となる。

7.3.4 漸化式

母関数表示 (7.96) を t や x で微分するとラゲール多項式に関する漸化式を導くことができる。

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (7.98)$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (7.99)$$

問 7.8. [B] 式 (7.98), (7.99) を示せ。

7.3.5 ラゲールの陪多項式

ラゲール多項式を微分したのも、ある微分方程式を満たす。そこでラゲールの陪多項式を以下のように定義する。

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \quad (7.100)$$

(7.51) の議論を思い出すと、 $L_n^k(x)$ は以下の微分方程式を満たす。

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (k+1-x) \frac{dy}{dx} + \nu y = 0 \quad (\nu = n) \quad (7.101)$$

$\nu \neq n$ のときは解は $x \rightarrow +\infty$ で $y \sim e^x \rightarrow \infty$ のように発散する。

(7.101) はちょうど (7.82) で $\alpha = k$ としたものと一致する。よって $L_n^k(x) \propto L_n^{(k)}(x)$ であることがわかる。係数まで求めると $L_n^k(x) = (n+k)! L_n^{(k)}(x)$ となる。このことから $L_n^k(x)$ は以下のロドリゲスの表示をもつ。

$$L_n^k(x) = \frac{(n+k)!}{n!} \frac{1}{x^k e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) \quad (7.102)$$

ラゲール陪多項式は以下の直交関係を満たす。

$$\int_0^\infty dx x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) = \frac{[(n+k)!]^3}{n!} \delta_{m,n} \quad (7.103)$$

7.4 エルミート多項式

エルミート多項式は調和振動子のシュレディンガー方程式を解くときに出てくる。この節ではエルミート多項式について詳しく見ていく。

エルミート多項式の定義は (7.84) で与えたが、念のためもう一度載せておく。

$$H_n(x) := (-1)^n \frac{1}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (7.104)$$

具体的にいくつか書き下してみると以下のようなになる。

$$H_0(x) = 1 \quad (7.105)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (7.106)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (7.107)$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (7.108)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad (7.109)$$

図 7.3 にエルミート多項式の概形をプロットした。

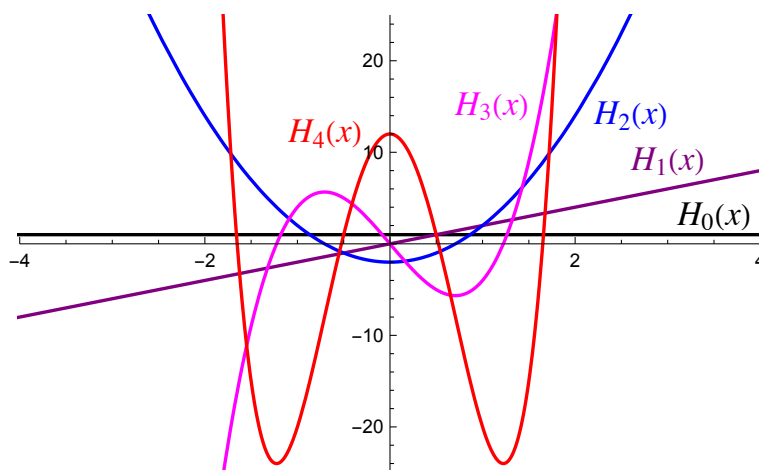


図 7.3: エルミート多項式 $H_n(x)$ の概形 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$)。

エルミート多項式は以下のエルミートの微分方程式を満たす ((7.85) 参照)。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \nu y = 0 \quad (\nu = 2n) \quad (7.110)$$

$x = \infty$ に不確定特異点をもつ。 $\nu \neq 2n$ のときは、解は $x \rightarrow \pm\infty$ で $y \sim e^{x^2} \rightarrow \infty$ のように発散する。

7.4.1 直交性

エルミート多項式は以下の直交関係を満たす。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n} \quad (7.111)$$

$m \neq n$ の場合は (7.86) で確認した。

問 7.9. [A] $m = n$ のときに (7.111) を示せ。

7.4.2 積分表示

グルサの積分公式 (7.22) をロドリゲスの表式 (7.104) に当てはめれば、エルミート多項式に対するシュレーフリの積分表示が得られる。

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint dz \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} \quad (7.112)$$

ここで積分経路は x を囲むようにとっている。

7.4.3 母関数表示

エルミート多項式には次の母関数表示がある。

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \quad (7.113)$$

ルジャンドル多項式のとくと同じく、積分表示 (7.112) から導くことができる。 $|t|$ が十分小さいと仮定して

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x^2}}{2\pi i} \oint dz \frac{(-t)^n e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} \\ &= \frac{e^{x^2}}{2\pi i} \oint dz \frac{e^{-z^2}}{z-x+t} \\ &= e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = e^{-t^2+2xt} \end{aligned} \quad (7.114)$$

となる。

7.4.4 漸化式

母関数表示 (7.113) を t や x で微分するとエルミート多項式に関する漸化式を導くことができる。

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (7.115)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \quad (7.116)$$

問 7.10. [A] 式 (7.115), (7.116) を示せ。

問 7.11. [B] 以下の微分方程式の解で $y(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) となるものが存在するのは $\lambda(\in \mathbb{R})$ がどのような値をとるときか。またそのときの解を求めよ。

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{2} x^2 y = -\lambda y \quad (7.117)$$

(ヒント: $u = e^{x^2/2} y$ とおく。)

第8章 超幾何関数

前章では微分方程式の解が多項式になるような場合について見てきた。この章では必ずしも解が多項式にならないようなより広いクラスの解について見ていく。特に2階の常微分方程式がちょうど3つの確定特異点を持つときに、その解は超幾何関数とよばれる。超幾何関数はこれまで出てきた特殊関数の多くを包含する親玉のような存在である。

8.1 ガウスの超幾何関数

8.1.1 フックス型微分方程式

一般に確定特異点を(無限遠を含めて)有限個持ち、それ以外の特異点を持たないような線形斉次微分方程式をフックス(Fuchs)型という。以下では微分方程式を複素変数 z で考えることにする。無限遠点も扱うので、複素平面に無限遠点を付け加えたリーマン(Riemann)球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (図8.1)で考えると都合がよい。

2階のフックス型微分方程式は一般に以下の形をしている([6]の第4章§15を参照)。

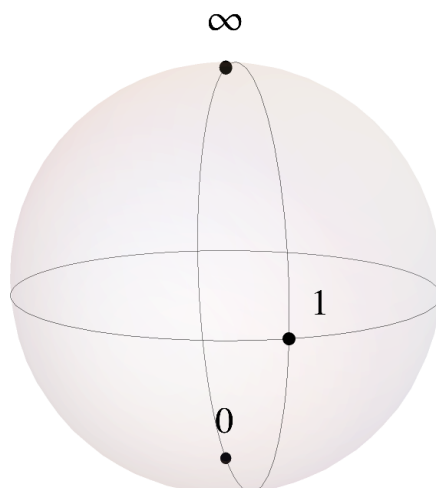
$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad (8.1)$$

$$p(z) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{z - z_j} \quad (8.2)$$

$$q(z) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{B_j}{(z - z_j)^2} + \frac{C_j}{z - z_j} \right) \quad (8.3)$$

$z = \infty$ で高々確定特異点となるためには

$$\sum_{j=1}^n C_j = 0 \quad (8.4)$$

図 8.1: リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 。

が必要。

問 8.1. [A] $z = \infty$ で高々確定特異点となるためには (8.4) が必要なことを示せ。

確定特異点が 1 つだけ (例えば $z = 0$) の場合は、 $z = \infty$ が特異点でないことから $A_1 = 2, B_1 = 0, C_1 = 0$ となる。このとき微分方程式 (8.1) は $u'' + 2z^{-1}u' = 0$ であり、解は定数または z^{-1} 。

確定特異点が 2 つだけ (例えば $z = 0, \infty$) の場合は、微分方程式 (8.1) は $u'' + A_1 z^{-1}u' + B_1 z^{-2}u = 0$ となる。 $z = 0$ での決定方程式は $\rho(\rho - 1) + A_1\rho + B_1 = 0$ であり、その解が特性指数 ρ_{\pm} である。 $\rho_+ \neq \rho_-$ の場合は z^{ρ_+}, z^{ρ_-} が解、 $\rho_+ = \rho_- (= \rho)$ の場合は $z^{\rho}, z^{\rho} \log z$ が解であることがわかる。特異点が他の場所にある場合も同様。

よって初等関数では表せない解が現れ得るのは確定特異点が 3 つ以上ある場合。ということ確定特異点がちょうど 3 つある場合を考えてみよう。

8.1.2 超幾何微分方程式

まず初めに $z = 0, 1, \infty$ の 3 点に確定特異点を持つような次の微分方程式を考える。

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} \right) \frac{du}{dz} + \left(\frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{C_1}{z} - \frac{C_1}{z-1} \right) u = 0 \quad (8.5)$$

$z = 0$ での特性指数を ρ_{\pm} , $z = 1$ での特性指数を λ_{\pm} とおいて、次のような変換を行う。

$$v(z) = \frac{1}{z^{\rho_-}(z-1)^{\lambda_-}} u(z) \quad (8.6)$$

このとき v は (8.5) で係数だけ置き換えた同じ形の微分方程式を満たし、 B_1 と B_2 の項は現れない。そのため最初から $B_1 = B_2 = 0$ とおいて構わない。

残るパラメーターは A_1, A_2, C_1 の 3 つ。これを α, β, γ で書き換えた次の形の方程式をガウス (Gauss) の超幾何微分方程式という¹。

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z) \frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \quad (8.7)$$

確定特異点 $z = 0$ のまわりで解を級数展開しよう。決定方程式は $\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0$ なので特性指数は $\rho = 0, 1 - \gamma$ である。まず $\rho = 0$ の場合を考えると、解は

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (8.8)$$

と展開される。これを (8.7) に代入して係数を比較すると漸化式

$$c_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} c_n \quad (8.9)$$

を得る。分母がゼロにならないように $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を仮定しておく。漸化式を解くと

$$c_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} c_0 \quad (8.10)$$

を得る。ここで $(\alpha)_n$ はポツホハマー (Pochhammer) の記号

$$(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1) \quad (8.11)$$

¹ $A_1 = \gamma, A_2 = \alpha + \beta - \gamma + 1, C_1 = -\alpha\beta$ とおく。

を表す。ただし $(\alpha)_0 = 1$ とする。 $c_0 = 1$ としたときの冪級数

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \quad (8.12)$$

をガウスの超幾何関数 (hypergeometric function) という²。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1 \quad (8.13)$$

より収束半径は 1 である。 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ は $|z| < 1$ において正則であり、解析接続によって $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ で定義できる。 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ (8.12) は微分方程式 (8.7) の解の一つである。

(8.7) は 2 階の常微分方程式なのでもう一つ解があるはず。以下では $\gamma \notin \mathbb{Z}$ とする。 $z = 0$ まわりでのもう一つの特性指数は $1 - \gamma$ であったので $u(z) = z^{1-\gamma}v(z)$ とおこう。 v の満たす微分方程式は (8.7) で (α, β, γ) を $(1 - \gamma + \alpha, 1 - \gamma + \beta, 2 - \gamma)$ で置き換えたものになることがわかる。よって

$$z^{1-\gamma}F(1 - \gamma + \alpha, 1 - \gamma + \beta; 2 - \gamma; z) \quad (8.14)$$

がもう一つの独立な解である。

$\gamma \in \mathbb{Z}$ のときは二つの特性指数 $\rho_1, \rho_2 (= 0, 1 - \gamma)$ の差が整数になる ($\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$)。この場合は、独立な二つの解を構成するのに級数展開とは別の取り扱いが必要になる ($\log z$ を含む解が出てくる)。詳しくは [6] を参照。

今度は確定特異点 $z = 1$ のまわりの解を考えよう。微分方程式 (8.7) で $w = 1 - z$ という変数変換をすると

$$w(1-w)\frac{d^2u}{dw^2} + (\alpha + \beta - \gamma + 1 - (\alpha + \beta + 1)w)\frac{du}{dw} - \alpha\beta u = 0 \quad (8.15)$$

となる。これは (8.7) でパラメーターを $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1)$ と置き換えたものになっている。 $z = 1$ ($w = 0$) まわりの特性指数は $0, \gamma - \alpha - \beta$ である。 $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$

²超幾何関数の名前の由来は、幾何級数 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ の拡張になっていることから来ている。

と仮定すると、独立な解は

$$F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \quad (8.16)$$

$$(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) \quad (8.17)$$

で与えられる。

同様にして、確定特異点 $z = \infty$ のまわりの解も考えられる。(8.7) で $w = z^{-1}$ と変数変換すると

$$w(w - 1) \frac{d^2 u}{dw^2} + (\alpha + \beta - 1 + (2 - \gamma)w) \frac{du}{dw} - \frac{\alpha\beta}{w} u = 0 \quad (8.18)$$

となる。 $w = 0$ での決定方程式は $\rho(\rho - 1) + (1 - \alpha - \beta)\rho + \alpha\beta = 0$ なので、特性指数は $\rho = \alpha, \beta$ である。 $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ と仮定する。 $u(w) = w^\alpha v(w)$ とおくと (8.18) は

$$w(1 - w) \frac{d^2 v}{dw^2} + (\alpha - \beta + 1 - (2\alpha - \gamma + 2)w) \frac{dv}{dw} - \alpha(\alpha - \gamma + 1)v = 0 \quad (8.19)$$

と書き換えられる。これは (8.7) で $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1)$ と置き換えたものに等しい。よって $z = \infty$ のまわりでの (8.7) の解として

$$z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1; \alpha - \beta + 1; z^{-1}) \quad (8.20)$$

が得られた。 $\rho = \beta$ に対応する解も同様に求めることができ

$$z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1; \beta - \alpha + 1; z^{-1}) \quad (8.21)$$

で与えられる。(8.20) と (8.21) が $z = \infty$ のまわりでの独立した二つの解である。

以上で $z = 0, 1, \infty$ のまわりでの解 (合計 6 個) が得られた。(8.7) は 2 階の微分方程式なので独立な解は 2 個のはず。3 つ以上の解があれば必ず線形従属の関係になる。ここから超幾何関数の間にたくさんの関係式が生じる。

例えば $z = 0$ のまわりの解と $z = 1$ のまわりの解の間には線形の関係があり、

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= c_1 F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) \\ &+ c_2 (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) \end{aligned} \quad (8.22)$$

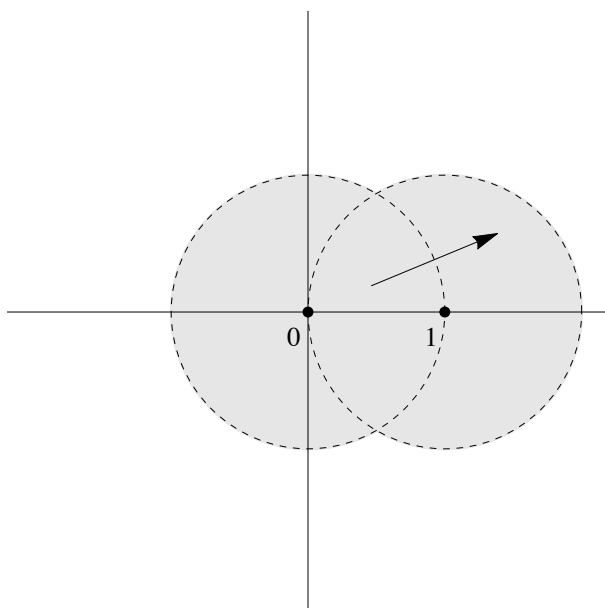


図 8.2: 冪級数で定義された $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ (8.12) が関係式 (8.22) によって解析接続される様子。

となる $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ が存在する。係数 c_1, c_2 は具体的に

$$c_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \tag{8.23}$$

$$c_2 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \tag{8.24}$$

となることが知られている [6]。(8.22) は $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ の解析接続の一例を与えている (図 8.2)。

例 8.1. ルジャンドルの微分方程式 (7.1) (ただし $\lambda = n(n+1)$) で $z = (1-x)/2$ とおくと、

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (1-2z)\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0 \tag{8.25}$$

となる。これは (8.7) で $\alpha = n+1, \beta = -n, \gamma = 1$ とおいたものに等しい。よってルジャンドル多項式は超幾何関数を用いて

$$P_n(x) = F\left(n+1, -n; 1; \frac{1-x}{2}\right) \tag{8.26}$$

と表せる。

問 8.2. [A] 級数展開 (8.12) にもとづいて (8.26) が成り立つことを確認せよ。

8.2 リーマンスキーム

前節で確定特異点が $z = 0, 1, \infty$ にある超幾何微分方程式について見てきた。一般に確定特異点が $z = z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ (ただし z_j は相異なる) にある場合はどうなるだろうか。

2 階のフックス型微分方程式で確定特異点を 3 つ持つものは以下の形をしていた。

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad (8.27)$$

$$p(z) = \sum_{j=1}^3 \frac{A_j}{z - z_j} \quad (8.28)$$

$$q(z) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{B_j}{(z - z_j)^2} + \frac{C_j}{z - z_j} \right) \quad (8.29)$$

$z = \infty$ で正則もしくは確定特異点となるためには係数に条件が必要。例えば $z_j \neq \infty$ ($j = 1, 2, 3$) の場合、 $z = \infty$ で正則となるためには条件 (8.4) に加えて

$$\sum_{j=1}^3 A_j = 2 \quad (8.30)$$

$$\sum_{j=1}^3 (z_j C_j + B_j) = 0 \quad (8.31)$$

$$\sum_{j=1}^3 (z_j^2 C_j + 2z_j B_j) = 0 \quad (8.32)$$

であることが必要。 A_j, B_j, C_j ($j = 1, 2, 3$) のうち独立なパラメーターは $9 - 4 = 5$ 個。

問 8.3. [A] $z = \infty$ で正則となるための条件が (8.4), (8.30), (8.31), (8.32) であることを示せ。

確定特異点 $z = z_j$ における特性指数を $\rho_j^{(1)}, \rho_j^{(2)}$ とおく。決定方程式は

$$\rho(\rho - 1) + A_j \rho + B_j = 0 \quad (8.33)$$

である。解と係数の関係から

$$\rho_j^{(1)} + \rho_j^{(2)} = 1 - A_j \quad (8.34)$$

$$\rho_j^{(1)} \rho_j^{(2)} = B_j \quad (8.35)$$

が成り立つ。特に (8.34) と (8.30) から

$$\sum_{j=1}^3 (\rho_j^{(1)} + \rho_j^{(2)}) = 1 \quad (8.36)$$

であることがわかる。これは $z_j = \infty$ のときも成り立つ。(8.36) をフックスの関係という。

確定特異点の位置 ($z = z_j$) と特性指数 $\rho_j^{(1)}, \rho_j^{(2)}$ のデータを以下のように並べた表のことをリーマンスキームという。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = z_1 & z = z_2 & z = z_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \rho_3^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \rho_3^{(2)} \end{array} \right\} \quad (8.37)$$

リーマンスキームは各特異点の近傍での解の局所的な振る舞いを表している。それだけでなく、(8.37) というリーマンスキームを持つフックス型の微分方程式はただ一つに限られることが知られている。その意味でリーマンスキームは確定特異点を 3 つ持つフックス型微分方程式を完全に特徴づける。

例 8.2. ガウスの超幾何微分方程式 (8.7) に対するリーマンスキームは以下ようになる。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = 0 & z = 1 & z = \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{array} \right\} \quad (8.38)$$

フックスの関係 (8.36) は、 $0 + (1 - \gamma) + 0 + (\gamma - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$ より確かに成り立っている。

前節と同様に、微分方程式 (8.27) に対して以下の変数変換

$$z \rightarrow w = z + a \quad (a \in \mathbb{C}) \quad (8.39)$$

$$z \rightarrow w = cz \quad (c \in \mathbb{C}) \quad (8.40)$$

$$z \rightarrow w = \frac{1}{z} \quad (8.41)$$

をしても (8.27) の形になり、確定特異点を 3 つ持つことが確かめられる。変換 (8.39), (8.40), (8.41) を組み合わせると一次分数変換

$$z \rightarrow w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0) \quad (8.42)$$

になる ($w = \text{定数}$ とならないためには $ad - bc \neq 0$ が必要)。この変換に対しても確定特異点を 3 つ持つ性質は保たれる。実はリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への一対一の正則関数は一次分数変換 (8.42) に限られることが知られている³。

特性指数が変換 (8.42) でどのように変わるか見てみよう。移り変わった先の特異点を $w_j := w(z_j)$ とする。 $z = z_j$ 付近で $u(z) \sim (z - z_j)^{\rho_j}$ と振る舞うとすると、変換後は

$$\begin{aligned} u(w) &\sim \left(\frac{dw - b}{-cw + a} - \frac{dw_j - b}{-cw_j + a} \right)^{\rho_j} \\ &\sim \left(\frac{d(w - w_j)}{-cw_j + a} \right)^{\rho_j} \\ &\sim \text{const.} \times (w - w_j)^{\rho_j} \quad (w \sim w_j) \end{aligned} \quad (8.43)$$

となる。すなわち特性指数は一次分数変換で不変である。

一次分数変換を用いると、超幾何微分方程式の確定特異点を $\hat{\mathbb{C}}$ 上の任意の 3 点に移すことができる。例えば z_1, z_2, z_3 を $0, 1, \infty$ に移すような変換 (8.42) が存在する。ゆえに、確定特異点を 3 つ持つ 2 階のフックス型微分方程式の解はガウスの超幾何関数で表せる。

³江口徹, 菅原裕二: 『共形場理論』(岩波書店) の Sec. 1.2 を参照。

問 8.4. [A] z_1, z_2, z_3 を $0, 1, \infty$ に移すような一次分数変換を求めよ。

問 8.5. [B] 以下の微分方程式の特異点を (無限遠を含めて) 全て求めよ。また、各確定特異点について特性指数を求めよ。

$$x^2(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} = h(h-1)y \quad (h \text{ は } 0 < h < 1 \text{ を満たす定数}) \quad (8.44)$$

リーマンスキームは一次分数変換 (8.42) のもとで次のように移り変わる。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = z_1 & z = z_2 & z = z_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \rho_3^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \rho_3^{(2)} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} w = w_1 & w = w_2 & w = w_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \rho_3^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \rho_3^{(2)} \end{array} \right\} \quad (8.45)$$

また、未知関数を

$$v(z) = \left(\frac{z-z_1}{z-z_3} \right)^\lambda \left(\frac{z-z_2}{z-z_3} \right)^\mu u(z) \quad (8.46)$$

のように変換すると、リーマンスキームは以下のように変化する。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = z_1 & z = z_2 & z = z_3 \\ \rho_1^{(1)} & \rho_2^{(1)} & \rho_3^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} & \rho_2^{(2)} & \rho_3^{(2)} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} z = z_1 & z = z_2 & z = z_3 \\ \rho_1^{(1)} + \lambda & \rho_2^{(1)} + \mu & \rho_3^{(1)} - \lambda - \mu \\ \rho_1^{(2)} + \lambda & \rho_2^{(2)} + \mu & \rho_3^{(2)} - \lambda - \mu \end{array} \right\} \quad (8.47)$$

この自由度を使うと $z = z_1$ と $z = z_2$ における特性指数のうちそれぞれ一つをゼロにすることができる。(8.6) で行った変換はこの操作に対応していた。

8.3 積分表示

ガウスの超幾何関数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ は $|z| < 1$ で以下の積分表示をもつ。

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-zt)^{-\beta} \quad (8.48)$$

ただし積分が収束するためには $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ であることが必要。また冪関数の分枝は主値をとる。すなわち偏角を $\arg t = 0$, $\arg(1-t) = 0$, $\arg(1-zt) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +0$) と選ぶ。

(8.48) の証明は冪級数 (8.12) から出発する。ガンマ関数の関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を思い出すとポツホハマー記号は

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \quad (8.49)$$

と表せる。これを用いると

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \end{aligned} \quad (8.50)$$

と書ける。ガンマ関数とベータ関数の間の関係式 $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ と積分表示 $B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ を用いると

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} B(\alpha+n, \gamma-\alpha) \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt t^{\alpha+n-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} (zt)^n \end{aligned} \quad (8.51)$$

となる。最後の無限級数は $(1 - zt)^{-\beta}$ の $t = 0$ まわりのテイラー展開に一致する。

$$\begin{aligned}
 (1 - zt)^{-\beta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} (1 - x)^{-\beta} \Big|_{x=0} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} \beta(\beta + 1) \cdots (\beta + n - 1) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} (zt)^n
 \end{aligned} \tag{8.52}$$

これで (8.48) が示された。

問 8.6. [B] 積分表示 (8.48) を用いて $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ の値を求めよ。

問 8.7. [B] 積分表示 (8.48) を用いて以下の関係式を示せ。

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1 - z)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{z - 1}\right) \tag{8.53}$$

(ヒント: $s = 1 - t$ と変数変換する)

8.4 合流型超幾何関数

超幾何微分方程式 (8.7) において $z = w/\beta$ と置き換えると、特異点は $(0, \beta, \infty)$ になる。解の一つは $F(\alpha, \beta; \gamma; w/\beta)$ で与えられる。ここで $\beta \rightarrow \infty$ とすると二つの確定特異点 β と ∞ が合流する (図 8.3)。



図 8.3: 特異点が合流する様子。

このとき微分方程式は (w を改めて z とおいて)

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0 \quad (8.54)$$

になる。(8.54) を合流型超幾何微分方程式という。 $z = \infty$ は二つの確定特異点が合流して不確定特異点になっている。

$\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき (8.54) の解の一つは

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} \left(\frac{z}{\beta}\right)^n \quad (8.55)$$

である。極限と無限和が交換するとして

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(\beta)_n}{\beta^n} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\beta} \cdot \frac{\beta+1}{\beta} \cdots \frac{\beta+n-1}{\beta} = 1 \quad (8.56)$$

であることを使うと、解は

$$F(\alpha; \gamma; z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \quad (8.57)$$

で与えられる。 $F(\alpha; \gamma; z)$ をクンマー (Kummer) の合流型超幾何関数という。(8.57) の右辺の無限級数は収束半径が ∞ で、全複素平面で解析的。もう一つの解は、(8.14) で $z \rightarrow z/\beta$ と置き換えて $\beta \rightarrow \infty$ とすればよいので $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\geq 2}$ のとき

$$z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z) \quad (8.58)$$

である。

問 8.8. [B] 式 (8.55) で極限と無限和を交換してよいことを示せ。

$F(\alpha; \gamma; z)$ の性質の多くは $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ の極限をとることで得られる。例えば $F(\alpha; \gamma; z)$ の積分表示は (8.48) から極限をとることで得られる。

$$F(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} \quad (8.59)$$

ただし積分が収束するためには $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ が必要である。

例 8.3. ラゲールの微分方程式 (7.93) は (8.54) で $\gamma = 1$, $\alpha = -\nu = -n$ とおいた場合に対応する。実際、ラゲール多項式は合流型超幾何関数を用いて表せる。

$$L_n(x) = n! F(-n; 1; x) \quad (8.60)$$

問 8.9. [B] ベッセル関数は合流型超幾何関数を用いて以下のように表せることを示せ。

$$J_n(x) = \frac{e^{-ix}}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n F\left(n + \frac{1}{2}; 2n + 1; 2ix\right) \quad (8.61)$$

第9章 球面調和関数と回転群

ラプラス方程式を球座標で解くときに現れるのが球面調和関数である。球面調和関数はラプラス方程式の解になっているだけでなく、回転操作に対して特定の振る舞いをする。回転操作は「群」をなし、球面調和関数はその「表現」を与えている。量子力学における角運動量の量子化と密接に関係する。

9.1 球面調和関数

ラプラス方程式 $\nabla^2 u = 0$ (5.21) を球座標 (r, θ, ϕ) で表すと以下のようになる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (9.1)$$

問 9.1. [B] ラプラス方程式 $\nabla^2 u = 0$ の球座標表示が (9.1) で与えられることを示せ。

変数分離形 $u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ を仮定する。(9.1) に代入すると

$$\sin^2 \theta \frac{(r^2 R')'}{R} + \sin \theta \frac{(\sin \theta \Theta')'}{\Theta} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \quad (9.2)$$

となる。左辺は r, θ の関数、右辺は ϕ の関数なので両辺定数である。定数を m^2 とおくと、

$$\sin^2 \theta \frac{(r^2 R')'}{R} + \sin \theta \frac{(\sin \theta \Theta')'}{\Theta} = m^2 \quad (9.3)$$

$$\Phi'' = -m^2 \Phi \quad (9.4)$$

が得られる。 Φ に関しては $\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi}$ が解となる。周期境界条件 $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ を課すと $m \in \mathbb{Z}$ がわかる。

(9.3) を変形すると

$$\frac{(r^2 R')'}{R} = -\frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (9.5)$$

となる。左辺は r の関数、右辺は θ の関数なので両辺定数である。定数を λ とおくと、

$$(r^2 R')' = \lambda R \quad (9.6)$$

$$\frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (9.7)$$

である。 $z = \cos \theta$ とおくと (9.7) は

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2} \right) \Theta = 0 \quad (9.8)$$

と表せる。これは微分方程式 (7.47) で $n(n+1) = \lambda$ としたものに对应する。よって $\lambda = l(l+1)$ (ただし $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $l \geq |m|$) のときは解の一つがルジャンドルの陪関数 $P_l^{|m|}(z)$ (7.46) で与えられる。もう一つの解は $z = \pm 1$ で発散する。また $\lambda \neq l(l+1)$ のときも解は $z = \pm 1$ で発散する。 $z = \pm 1$ で解が有限という境界条件をおくと λ の値は $\lambda = l(l+1)$ に限られ、 $\Theta(\theta) = P_l^{|m|}(\cos \theta)$ となる。

このとき動径方向の方程式 (9.6) は $(r^2 R')' = l(l+1)R$ になる。独立な二つの解は $R(r) = r^l, r^{-l-1}$ である。一般解は以下のようになる。

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (9.9)$$

このうち、角度に依存する部分だけを抜き出したものを球面調和関数という。

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) := N_{l,m} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, l) \quad (9.10)$$

規格化定数 $N_{l,m}$ は正規直交関係を満たすように決める。

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} Y_{l',m'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (9.11)$$

ここで内積は単位球面の面積要素 $dS = d\theta d\phi \sin \theta$ を用いて

$$\langle f, g \rangle := \int dS \bar{f} g \quad (9.12)$$

と定義している。指数関数の直交関係 (2.24) とルジャンドル陪関数の直交関係 (7.48) を使
うと

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} Y_{l',m'}(\theta, \phi) \\
&= \overline{N_{l,m}} N_{l',m} 2\pi \delta_{m,m'} \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l^{|m|}(\cos \theta) P_{l'}^{|m|}(\cos \theta) \\
&= \overline{N_{l,m}} N_{l',m} 2\pi \delta_{m,m'} \int_{-1}^1 dz P_l^{|m|}(z) P_{l'}^{|m|}(z) \\
&= |N_{l,m}|^2 2\pi \delta_{m,m'} \frac{2(l+|m|)!}{(2l+1)(l-|m|)!} \delta_{l,l'} \tag{9.13}
\end{aligned}$$

となる。そこで規格化定数を以下のように選ぶ。

$$N_{l,m} := \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} \tag{9.14}$$

ε は位相因子 ($|\varepsilon| = 1$) でどのように選んでもよいが、慣例で以下のようにする。

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m \geq 0 \\ 1 & m < 0 \end{cases} \tag{9.15}$$

単位球面上のラプラシアンを

$$\Delta_{S^2} := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{9.16}$$

で定義する。これは (9.1) で r 微分の項を無視し、 $r = 1$ としたものに等しい。球面調和関数は Δ_{S^2} の固有関数になっていて、固有値は $-l(l+1)$ である。

$$\Delta_{S^2} Y_{l,m} = -l(l+1) Y_{l,m} \tag{9.17}$$

例 9.1. $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ をいくつか具体的に書き下してみる。

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (9.18)$$

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (9.19)$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \quad (9.20)$$

$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (9.21)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \quad (9.22)$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \quad (9.23)$$

図 9.1 にこれらの球面調和関数をプロットした。

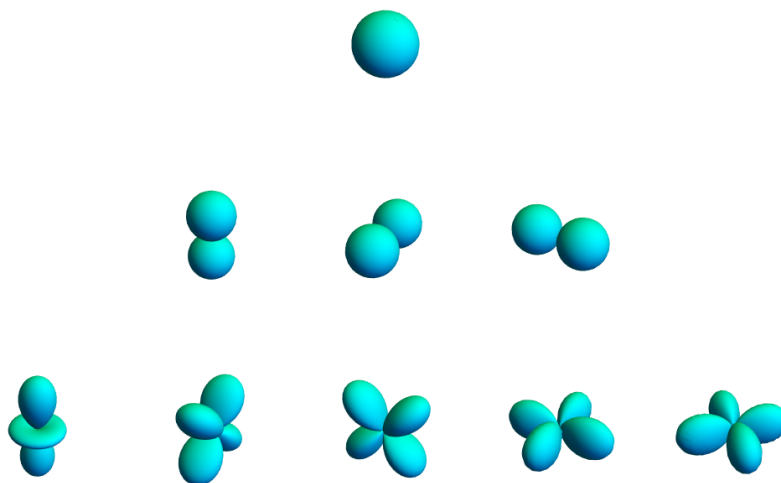


図 9.1: 球面調和関数を原点からの距離でプロットした。上段は $|Y_{0,0}|$ 、中段は左から $|Y_{1,0}|$, $|\operatorname{Re} Y_{1,1}|$, $|\operatorname{Im} Y_{1,1}|$ 、下段は左から $|Y_{2,0}|$, $|\operatorname{Re} Y_{2,1}|$, $|\operatorname{Im} Y_{2,1}|$, $|\operatorname{Re} Y_{2,2}|$, $|\operatorname{Im} Y_{2,2}|$ 。

9.2 回転操作

球面調和関数を回転操作の観点から見直してみよう。まず2次元の回転を思い出す。点 $x = (x, y)$ を原点のまわりに角度 θ で回転させたら点 $x' = (x', y')$ にうつるとすると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

という関係がある。2×2行列で表される。

3次元の場合はどうなるだろうか。点 x を x 軸まわりに角度 θ で回転させたら x' にうつるとすると、2次元と同じように考えて3×3の回転行列 $R_x(\theta)$ を用いて $x' = R_x(\theta)x$ と表せる。ここで

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

である。 y 軸まわり、 z 軸まわりについても同様に回転行列は

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

と表される。連続する回転操作 (例えば j 軸まわりに角度 θ で回転してから k 軸まわりに角度 ϕ で回転する) は行列の積 ($R_k(\phi)R_j(\theta)$) で表される。逆回転の操作は $R_j(\theta)^{-1} = R_j(-\theta)$ で表される。何もしない操作は $R_j(0) = 1$ (単位行列) である。

一般に3次元空間において原点まわりの任意の回転は R_x, R_y, R_z の組み合わせで書ける。例えば3次元空間の回転を指定する方法としてオイラー角 (α, β, γ) がある。一例として、

最初に z 軸まわりに角度 α で回転させる。この回転によって y 軸は y' 軸にうつるとする。次に y' 軸まわりに角度 β で回転させる。この回転によって z 軸は z' 軸にうつるとする。最後に z' 軸まわりに角度 γ で回転させる。以上の回転操作を表すような回転行列は

$$R(\alpha, \beta, \gamma) := R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \quad (9.28)$$

となる。 $R_{y'}(\beta)$ や $R_{z'}(\gamma)$ はもとの $R_y(\beta)$ や $R_z(\gamma)$ と次ような関係がある。

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\alpha)^{-1} \quad (9.29)$$

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(\beta)^{-1} \quad (9.30)$$

この関係を用いると $R(\alpha, \beta, \gamma)$ は

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}(\beta)^{-1}R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\alpha)^{-1}R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \end{aligned} \quad (9.31)$$

と書かれる。最後の等式で $R_z(\gamma)$ と $R_z(\alpha)$ が可換であることを用いた。このように角度を3つ指定することによってどんな回転操作も表すことができる。 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ は直交行列である ($RR^T = R^T R = 1$)。これは R_y, R_z が直交行列であることからわかる。

どんな回転操作を連続して行っても、何かしらの回転操作になっている。連続する回転操作は結合則を満たす ($R(R'R'') = (RR')R''$)。さらに逆回転 (逆元) と何もしない操作 (単位元) があるので、回転操作の集合は数学的には「群」をなすという (回転群)。群は物理では対称性を表す重要な概念で、物理数学 III で詳しく扱う。

3次元空間上の関数 $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ は回転操作によってどのように変化するだろうか。例えば実軸上の関数 $f(x)$ を $a \in \mathbb{R}$ だけ平行移動すると $f(x - a)$ となるように、回転後の関数を Ru とすると、

$$(Ru)(\mathbf{x}) = u(R^{-1}\mathbf{x}) \quad (9.32)$$

となる。ここで R^{-1} は対応する回転行列の逆行列を表す。

9.3 無限小回転

無限小の角度で回転させたときの変化を考えよう。 x 軸まわりに微小な角度 $\delta\theta$ で回転させたときの回転行列は

$$R_x(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta \\ 0 & \delta\theta & 1 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

である。 R_y, R_z についても同様である。これに対応して3次元空間上の関数は

$$\begin{aligned} (R_x(\delta\theta)u)(\mathbf{x}) &= u(R_x(\delta\theta)^{-1}\mathbf{x}) \\ &= u(x, y + \delta\theta z, z - \delta\theta y) \\ &= \left(1 + \delta\theta z \frac{\partial}{\partial y} - \delta\theta y \frac{\partial}{\partial z}\right) u(x, y, z) \end{aligned} \quad (9.34)$$

と変化する。ここで関数を無限小回転させる生成子 L_x を

$$R_x(\delta\theta)u =: (1 - i\delta\theta L_x)u \quad (9.35)$$

と定義しよう。 L_x は関数に作用する微分演算子で

$$L_x = -iy \frac{\partial}{\partial z} + iz \frac{\partial}{\partial y} \quad (9.36)$$

と定められる。 L_y, L_z についても同様に定義される。まとめると

$$L_x = -iy \frac{\partial}{\partial z} + iz \frac{\partial}{\partial y} \quad (9.37)$$

$$L_y = -iz \frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.38)$$

$$L_z = -ix \frac{\partial}{\partial y} + iy \frac{\partial}{\partial x} \quad (9.39)$$

量子力学では L_j (に \hbar をかけたもの) は角運動量の演算子と同一視される。

L_j が与えられれば有限の角度 ($N\delta\theta = \theta$) で回転させる操作は

$$\begin{aligned} R_j(\theta)u &= R_j(\delta\theta)^N u = (1 - i\delta\theta L_j)^N u \\ &= \left(1 - i\frac{\theta}{N}L_j\right)^N u \\ &\rightarrow \exp(-i\theta L_j)u \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{9.40}$$

のように指数関数で表される。よって $\{L_j\}$ のことがわかれば $\{R_j\}$ のことも (ほぼ) わかる。

定義 9.1. 交換関係

演算子 A, B に対して $[A, B] := AB - BA$ を A と B の交換子という。

交換子は次のような性質を持つ。

- $[A, A] = 0$
- $[A, B] = -[B, A]$
- $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (ヤコビ恒等式)

L_j 同士は次のような交換関係を満たす。

$$[L_x, L_y] = iL_z \tag{9.41}$$

$$[L_y, L_z] = iL_x \tag{9.42}$$

$$[L_z, L_x] = iL_y \tag{9.43}$$

すなわち $\{L_j\}$ は交換子について代数的に閉じている。交換子のような代数によって閉じている演算子の集合をリー代数という (詳しくは物理数学 III で)。

問 9.2. [A] 交換関係 (9.41), (9.42), (9.43) が成り立つことを確認せよ。

次のような演算子を定義しておくとう便利である。

$$L_{\pm} := L_x \pm iL_y \quad (9.44)$$

L_{\pm} は昇降演算子といわれる。その意味は後で明らかになる。 L_{\pm} は以下の交換関係を満たす。

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (9.45)$$

$$[L_+, L_-] = 2L_z \quad (9.46)$$

さらに $\{L_j\}$ の長さの2乗のようなものを定義しよう。

$$L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (9.47)$$

量子力学では全角運動量演算子に対応する。 L^2 は全ての生成子と交換する。

$$[L^2, L_j] = 0 \quad (9.48)$$

全ての生成子と交換するような演算子をカシミア (Casimir) 演算子という。

問 9.3. [A] 交換関係 (9.45), (9.46), (9.48) を示せ。

9.4 球面調和関数との関係

ここからは球面調和関数との関係について見ていく。まず考察の対象を単位球面 S^2 上の関数 $u(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in S^2$) に限定しよう。 L^2 の関数 $u(\mathbf{x})$ への作用は球面上のラプラシアン (9.16) にマイナスをつけたものになる。

$$L^2 u(\mathbf{x}) = -\Delta_{S^2} u(\mathbf{x}) \quad (9.49)$$

問 9.4. [B] L^2 を球座標表示することで (9.49) を示せ。

よって Δ_{S^2} の固有関数は L^2 の固有関数でもある。 $[L^2, L_z] = 0$ (9.48) より L^2 と L_z の両方に対して同時に固有関数となるようなものが存在する。これは可換なエルミート行列は同時対角化可能であることと同じ理屈である。そこで L^2, L_z のそれぞれに対して固有値 λ, m を持つような固有関数を $u_{\lambda, m}(\mathbf{x})$ とおく。

$$L^2 u_{\lambda, m}(\mathbf{x}) = \lambda u_{\lambda, m}(\mathbf{x}) \quad (9.50)$$

$$L_z u_{\lambda, m}(\mathbf{x}) = m u_{\lambda, m}(\mathbf{x}) \quad (9.51)$$

球面上の関数に対しては内積を (9.12) で定義するのであった。固有関数 $u_{\lambda, m}$ は規格化されているとする。

$$\langle u_{\lambda, m}, u_{\lambda, m} \rangle = 1 \quad (9.52)$$

L^2, L_z は自己随伴演算子なので固有値は実である ($\lambda, m \in \mathbb{R}$)。固有値 λ, m は任意の値を取れるわけではない。むしろ代数関係から強い制約を受ける。

$$L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) \quad (9.53)$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \langle u_{\lambda, m}, (L^2 - L_z^2) u_{\lambda, m} \rangle &= \frac{1}{2} \langle u_{\lambda, m}, L_+ L_- u_{\lambda, m} \rangle + \frac{1}{2} \langle u_{\lambda, m}, L_- L_+ u_{\lambda, m} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle L_- u_{\lambda, m}, L_- u_{\lambda, m} \rangle + \frac{1}{2} \langle L_+ u_{\lambda, m}, L_+ u_{\lambda, m} \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (9.54)$$

が成り立つ。左辺は $\langle u_{\lambda, m}, (L^2 - L_z^2) u_{\lambda, m} \rangle = \lambda - m^2$ であるので、

$$\lambda \geq m^2 \quad (9.55)$$

がいえる。一方、 $[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}$ (9.45) より

$$L_z(L_{\pm} u_{\lambda, m}) = ([L_z, L_{\pm}] + L_{\pm} L_z) u_{\lambda, m} = (m \pm 1) L_{\pm} u_{\lambda, m} \quad (9.56)$$

である。つまり、 $L_{\pm}u_{\lambda,m}$ は L_z の固有関数であり、固有値 $m \pm 1$ を持つ。固有値を1だけ上げたり下げたりするので L_{\pm} を昇降演算子とよんでいる。また (9.48) より $[L^2, L_{\pm}] = 0$ であるので、

$$L^2(L_{\pm}u_{\lambda,m}) = L_{\pm}L^2u_{\lambda,m} = \lambda L_{\pm}u_{\lambda,m} \quad (9.57)$$

である。 $L_{\pm}u_{\lambda,m}$ は L^2 の固有関数でもあり、固有値は λ で変わらない。なので

$$L_{\pm}u_{\lambda,m} = c_{\lambda,m}u_{\lambda,m\pm 1} \quad (9.58)$$

となるような定数 $c_{\lambda,m}$ が存在する。

$u_{\lambda,m}$ に L_+ を繰り返しかけていくと

$$(L_+)^n u_{\lambda,m} \propto u_{\lambda,m+n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.59)$$

となる。 L_z の固有値がどんどん増加していき、あるところで不等式 (9.55) が破れてしまう。ということは L_z の固有値には上限がないといけない。その上限値を l 、固有関数を $u_{\lambda,l} (\neq 0)$ としよう。上限値に達したら L_+ をかけて固有値を上げようとしてもゼロにならざるを得ない。

$$L_+u_{\lambda,l} = 0 \quad (9.60)$$

このような $u_{\lambda,l}$ を最高ウェイト状態とよんだりする。(9.60) より

$$L_-L_+u_{\lambda,l} = 0 \quad (9.61)$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} L_-L_+ &= L_x^2 + L_y^2 - i(L_yL_x - L_xL_y) \\ &= L^2 - L_z^2 - L_z \end{aligned} \quad (9.62)$$

であることに注意すると、

$$(L^2 - L_z^2 - L_z)u_{\lambda,l} = 0 \quad (9.63)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - l^2 - l)u_{\lambda,l} = 0 \quad (9.64)$$

となる。 $u_{\lambda,l} \neq 0$ より

$$\lambda = l(l+1) \quad (9.65)$$

でなければならない。

今度は $u_{\lambda,l}$ に L_- をかけていって L_z の固有値を下げていこう。

$$(L_-)^n u_{\lambda,l} \propto u_{\lambda,l-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.66)$$

先ほどと同じ議論で L_z の固有値に下限がないと (9.55) に矛盾してしまう。 $n = N$ 回 ($N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) L_- を作用させたら下限に達するとしよう。そのときの固有関数を $u_{\lambda,l-N} (\neq 0)$ とする。 $u_{\lambda,l-N}$ に L_- を作用させるとゼロにならないといけない。

$$L_- u_{\lambda,l-N} = 0 \quad (9.67)$$

(9.67) より

$$L_+ L_- u_{\lambda,l-N} = 0 \quad (9.68)$$

である。(9.62) と同様にして

$$L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + L_z \quad (9.69)$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} (L^2 - L_z^2 + L_z) u_{\lambda,l-N} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - (l-N)^2 + l-N) u_{\lambda,l-N} &= 0 \end{aligned} \quad (9.70)$$

となる。 $u_{\lambda,l-N} \neq 0$ より

$$\lambda = (l-N)^2 - (l-N) \quad (9.71)$$

が成り立つ。(9.65) と (9.71) を比べることで

$$N = 2l \quad (9.72)$$

であることがわかる。このことから l は整数または半奇整数でないといけない。

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \quad (9.73)$$

量子力学では l はスピンに対応する。このとき L^2 の固有値 λ と L_z の固有値 m は次の値をとる。

$$\lambda = l(l+1) \quad (9.74)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (9.75)$$

ということで $L^2 = -\Delta_{S^2}$ の固有値が $l(l+1)$ であることが微分方程式を解くことなしに代数関係だけからわかってしまった。

ところで (9.17) では l は整数の値しか取らなかった。半奇整数の場合はどうなるのだろうか。 l が半奇整数の場合、固有関数 $u_{\lambda,m}$ を z 軸まわりに 2π 回転させると (9.40) より

$$R_z(2\pi)u_{\lambda,m} = \exp(-2\pi i L_z)u_{\lambda,m} = \exp(-2\pi i m)u_{\lambda,m} = (-1)^{2m}u_{\lambda,m} \quad (9.76)$$

となる。 l が半奇整数のときは $2m$ が奇数となる場合が現れて 2π の回転で元に戻らなくなる。 $u_{\lambda,m}$ が球面上の一価関数だとすればこのような場合は排除される。よって以下では l が整数の場合だけ考える。実は l が半奇整数の場合も物理的に意味を持つ (電子のスピンなど)。

$L^2 = -\Delta_{S^2}$ の固有値だけでなく固有関数も特定できる。 L_{\pm}, L_z を球座標で表すと

$$L_{\pm} = \pm e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (9.77)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (9.78)$$

となる。

問 9.5. [A] (9.77), (9.78) を示せ。

最高ウェイト状態 $u_{\lambda,l}$ は L_z の固有関数で (9.60) を満たすので、

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} u_{\lambda,l} = l u_{\lambda,l} \quad (9.79)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) u_{\lambda,l} = 0 \quad (9.80)$$

が成り立つ。変数分離 $u_{\lambda,l} = \Theta_l(\theta)\Phi_l(\phi)$ を仮定すると

$$\Theta_l(\theta) = \sin^l \theta \quad (9.81)$$

$$\Phi_l(\phi) = e^{il\phi} \quad (9.82)$$

が得られる。よって最高ウェイト状態は

$$u_{\lambda,l} = \text{const.} \times e^{il\phi} \sin^l \theta \quad (9.83)$$

となる。これは球面調和関数 $Y_{l,l}(\theta, \phi)$ に一致する。 $m = l$ 以外の固有関数は最高ウェイト状態に L_- をかけていくことで生成できる。

$$\begin{aligned} u_{\lambda,m} &= (L_-)^{l-m} u_{\lambda,l} \\ &= \text{const.} \times \left(e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right)^{l-m} (e^{il\phi} \sin^l \theta) \end{aligned} \quad (9.84)$$

これが球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ に一致する。

問 9.6. [B] (9.84) が球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ に一致することを、 $l = 0, 1, 2$, $|m| \leq l$ の場合に確認せよ。

以上より球面調和関数は、代数関係 (9.41), (9.42), (9.43) を満たすような生成子 $\{L_j\}$ の「表現」を与えていることがわかる。どういうことかということ、球面調和関数は L^2, L_z の固有関数なので固有空間というベクトル空間の基底になっていて、 $\{L_j\}$ はそのベクトル空間に作用する行列だと思えることができる。

例えば $l = 1$ のときは基底は $Y_{1,1}, Y_{1,0}, Y_{1,-1}$ の3つ。よって固有空間は3次元。このとき

$$\langle Y_{1,m}, L_z Y_{1,m'} \rangle = m \delta_{m,m'} \quad (9.85)$$

$$\langle Y_{1,m}, L_{\pm} Y_{1,m'} \rangle = \sqrt{(1 \mp m + 1)(1 \pm m)} \delta_{m,m' \pm 1} \quad (9.86)$$

が成り立つ ($|m|, |m'| \leq 1$)。よって L_z, L_{\pm} は

$$L_z \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.87)$$

$$L_+ \doteq \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.88)$$

$$L_- \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.89)$$

という行列表示をもつ (3次元表現)。このような代数の生成子と行列の間の対応は、純粋に代数的に決めることができる (リー代数の表現論)。

問 9.7. [B] $l = 2$ のときに L_z, L_{\pm} の行列表示を求めよ。

第10章 スツルム・リウビル理論

これまで様々な微分方程式の解について見てきたが、それらの多くは自己随伴演算子の固有値問題として捉えることができる。それについて統一的な見方を与えてくれるのがスツルム・リウビル (Sturm-Liouville) 理論である。量子力学におけるシュレディンガー方程式と密接な関係があり、エネルギー固有値がとびとびの値をとることの数学的背景になっている。

10.1 スツルム・リウビル型微分方程式

以下の形で与えられる微分方程式はスツルム・リウビル型微分方程式とよばれる。

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = -\lambda w(x)y \quad (10.1)$$

特殊な形をしているように見えるが、任意の2階の線形斉次常微分方程式は常にこの形に変形することができる。2階の線形斉次方程式は一般に以下の形をしている。

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (10.2)$$

(10.2) の両辺に

$$\mu(x) := \frac{1}{P(x)} \exp \left(\int^x dt \frac{Q(t)}{P(t)} \right) \quad (10.3)$$

をかけると、

$$\frac{d}{dx} \left(\mu(x) P(x) \frac{dy}{dx} \right) + \mu(x) R(x)y = 0 \quad (10.4)$$

微分方程式	$p(x)$	$q(x)$	$w(x)$	λ
ルジャンドル	$1 - x^2$	0	1	$n(n+1)$
ルジャンドル陪	$1 - x^2$	$-\frac{m^2}{1-x^2}$	1	$n(n+1)$
ラゲール	xe^{-x}	0	e^{-x}	n
ラゲール陪	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$x^k e^{-x}$	n
エルミート	e^{-x^2}	0	e^{-x^2}	$2n$
ベッセル	x	$-\frac{\nu^2}{x}$	x	α_n^2
単振動	1	0	1	n^2

表 10.1: 各微分方程式をスツルム・リウビル型にしたときの係数。 α_n はベッセル関数 $J_\nu(x)$ の正の零点。適当な境界条件のもとで λ は離散的な値をとることがわかる。

と変形できる。これはスツルム・リウビル型になっている。 $q(x), w(x), \lambda$ の選び方には任意性が残るが、後で見ると $w(x)$ を内積の重み、 λ を固有値と見なすことになる。表 10.1 に様々な微分方程式をスツルム・リウビル型にしたときの係数をまとめた。

例 10.1. ルジャンドルの微分方程式 (7.1) をスツルム・リウビル型に直すと

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0 \quad (10.5)$$

となるので、 $p(x) = 1 - x^2, q(x) = 0, w(x) = 1, \lambda = n(n+1)$ とすれば対応している。

例 10.2. 単振動の微分方程式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0 \quad (10.6)$$

である。 $p(x) = 1, q(x) = 0, w(x) = 1, \lambda = n^2$ とすればスツルム・リウビル型である。周期境界条件 $y(0) = y(2\pi)$ のもとで解は $y = e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) となる。

例 10.3. ベッセルの微分方程式 (6.6) は、ベッセル関数の直交性 (6.37) のためその扱いは少し特殊である。式 (6.6) で x を $\alpha_n x$ (α_n は $J_\nu(x)$ の正の零点) に置き換えたものは

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{\nu^2}{x} y = -\alpha_n^2 xy \quad (10.7)$$

と表せるので、 $p(x) = x, q(x) = -\frac{\nu^2}{x}, w(x) = x, \lambda = \alpha_n^2$ とすればスツルム・リウビル型である。適当な境界条件のもと、解は $y = J_\nu(\alpha_n x)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で与えられる。

10.2 自己随伴演算子

スツルム・リウビル型の微分方程式は自己随伴演算子の固有値問題として解釈することができる。それを見るために、微分演算子

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{w(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right) \quad (10.8)$$

を定義しよう。 \mathcal{L} は線形演算子であり、これを用いるとスツルム・リウビル型の微分方程式は

$$\mathcal{L}y = \lambda y \quad (10.9)$$

と表せる。これはまさに固有値問題の形をしている。以下では、 $p(x), q(x), w(x) \in \mathbb{R}$ 、有限区間 $[a, b]$ で $p(x), q(x), w(x)$ は連続、 $p(x), w(x) > 0$ と仮定する。

\mathcal{L} は適当な内積空間 (正確にはヒルベルト空間) 上で自己随伴 ($\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$) の性質を持つ¹。ここで内積は有限区間 $[a, b]$ で

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b dx w(x) \overline{f(x)} g(x) \quad (10.10)$$

と定義する。 $w(x)$ は内積の重みになっている。境界条件として次のようなものを考えよう。

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (10.11)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (10.12)$$

ただし α_i, β_i は実数で $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ とする。区間 $[a, b]$ の端点 $x = a$ と b で独立に境界条件が課されている。微分方程式 (10.1) に対して境界条件 (10.11), (10.12) を満たす解を求める問題をスツルム・リウビル問題という。

¹ 正確にはここで述べる性質はエルミート性であり、自己随伴の定義には追加の条件がつく。詳しくは [9] を参照。

境界条件 (10.11), (10.12) を満たすような任意の関数 f, g に対して $\langle f, \mathcal{L}g \rangle$ を考えよう。

部分積分を繰り返すことで

$$\begin{aligned}
 \langle f, \mathcal{L}g \rangle &= - \int_a^b dx \overline{f(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right) g(x) \\
 &= - \overline{f(x)} p(x) g'(x) \Big|_a^b + \int_a^b dx \left(\frac{d}{dx} \overline{f(x)} \right) p(x) \frac{d}{dx} g(x) - \int_a^b dx \overline{f(x)} q(x) g(x) \\
 &= - \overline{f(x)} p(x) g'(x) \Big|_a^b + \overline{f'(x)} p(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \overline{f(x)} \right) g(x) \\
 &\quad - \int_a^b dx q(x) \overline{f(x)} g(x) \\
 &= p(x) (\overline{f'(x)} g(x) - \overline{f(x)} g'(x)) \Big|_a^b + \langle \mathcal{L}f, g \rangle
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

という関係が得られる。境界項はロンスキアン (Wronskian)

$$W(f, g) := \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \tag{10.14}$$

を用いて $-p(x)W(\overline{f}, g) \Big|_a^b$ と書ける。 f, g は境界条件 (10.11), (10.12) を満たしていると仮定したのでこれはゼロである。よって

$$\langle f, \mathcal{L}g \rangle = \langle \mathcal{L}f, g \rangle \tag{10.15}$$

であることがわかった。 \mathcal{L} の随伴演算子は $\langle \mathcal{L}^\dagger f, g \rangle := \langle f, \mathcal{L}g \rangle$ で定義されるので、 \mathcal{L} は自己随伴 ($\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$) であると言える。

自己随伴演算子の固有値は実数でなければならない。なぜならば、 \mathcal{L} の固有関数を $y (\neq 0)$ 、対応する固有値を λ とすると先ほどの関係 (10.15) より

$$\langle y, \mathcal{L}y \rangle = \langle \mathcal{L}y, y \rangle \tag{10.16}$$

であるが、 $\mathcal{L}y = \lambda y$ より

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle y, y \rangle = 0 \tag{10.17}$$

である。 $\langle y, y \rangle > 0$ であるので $\lambda = \bar{\lambda}$ が結論される。

y_1 と y_2 を異なる固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) に属するスツルム・リウビル問題の固有関数とする。(10.15) より

$$\langle y_1, \mathcal{L}y_2 \rangle = \langle \mathcal{L}y_1, y_2 \rangle \quad (10.18)$$

であるが、 $\mathcal{L}y_1 = \lambda_1 y_1, \mathcal{L}y_2 = \lambda_2 y_2$ より

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle y_1, y_2 \rangle = 0 \quad (10.19)$$

である。 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので

$$\langle y_1, y_2 \rangle = 0 \quad (10.20)$$

がいえる。すなわち y_1 と y_2 は直交する。

固有関数は常に実関数にとれる。もし固有関数が複素解 y になったら、 \bar{y} も同じ固有値に属する固有関数なので $y + \bar{y}$ や $i(y - \bar{y})$ を考えれば実関数になる。

10.3 固有値、固有関数の性質

スツルム・リウビル問題の固有値、固有関数は以下の性質を持つ。

- (i) 固有値は可算無限個で $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ とラベル付けできて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ である。
- (ii) 固有値 λ_n に対応する固有関数 y_n は (定数倍の違いを除いて) ただ一つであり、 y_n は (a, b) 上でちょうど n 個の零点を持つ。
- (iii) 区間 $[a, b]$ 上の任意の (境界条件を満たす) 関数を直交基底 $\{y_n\}_n$ で展開できる。

このうち、性質 (i) と (ii) について示そう。ここでの議論は [7] に従った。

まず $r(x), \theta(x)$ を次のように定義する。

$$p(x)y'(x) =: r(x) \cos \theta(x) \quad (10.21)$$

$$y(x) =: r(x) \sin \theta(x) \quad (10.22)$$

ここで $r(x) = \sqrt{(p(x)y'(x))^2 + y(x)^2} \geq 0$ である。微分方程式 (10.1) に代入すると、

$$(r \cos \theta)' + (\lambda w + q)r \sin \theta = 0 \quad (10.23)$$

となる。一方、

$$r \cos \theta = py' = p(r \sin \theta)' \quad (10.24)$$

が成り立つ。これらを r' と θ' について解くと

$$r' = \frac{1}{2}r \left(\frac{1}{p} - \lambda w - q \right) \sin 2\theta \quad (10.25)$$

$$\theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda w + q) \sin^2 \theta \quad (10.26)$$

となる。(10.26) は θ だけの微分方程式になっていることに注意。

境界条件については (10.11), (10.12) より

$$\alpha_1 r(a) \sin \theta(a) + \alpha_2 \frac{r(a)}{p(a)} \cos \theta(a) = 0 \quad (10.27)$$

$$\beta_1 r(b) \sin \theta(b) + \beta_2 \frac{r(b)}{p(b)} \cos \theta(b) = 0 \quad (10.28)$$

と表せる。

(10.25) より $\theta(x)$ が決まれば $r(x)$ は以下のように解ける。

$$r(x) = r(a) \exp \left(\frac{1}{2} \int_a^x dt \left(\frac{1}{p(t)} - \lambda w(t) - q(t) \right) \sin 2\theta(t) \right) \quad (10.29)$$

$r(x)$ は符号が変わらないことに注意。そのため以下では $r(x) > 0$ ($x \in [a, b]$) とする。

$y(x)$ が零点を持つのは $\sin \theta(x) = 0$ 、すなわち $\theta(x) = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) となるとき。そこでは (10.26) より $\theta' = \frac{1}{p} > 0$ が成り立つ。よって $x = x_0$ において $\theta(x_0) = n\pi$ であれば、 $x > x_0$

において $\theta(x) > n\pi$ となる。特に $x \in (a, b)$ における $y(x)$ の零点の個数は、 $\theta(a)$ と $\theta(b)$ の間にある (整数) $\times\pi$ となる点の個数に等しい。

$\theta(x)$ は (10.27), (10.28) より次の境界条件を満たす。

$$\cot \theta(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) \quad (10.30)$$

$$\cot \theta(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_2} p(b) \quad (10.31)$$

(10.30) より $\theta(a) = \cot^{-1}(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a))$ ($0 \leq \theta(a) < \pi$) と選ぶ。 $\alpha_2 = 0$ のときは $\theta(a) = 0$ とする。この $\theta(a)$ を初期条件として微分方程式 (10.26) を解いたときの $\theta(x)$ を $\theta(x, \lambda)$ と書くことにする。残った条件 (10.31) から λ の値を決める。

$\theta(x, \lambda)$ は λ について単調増加すること ($\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(x, \lambda) > 0$) を示す。(10.31) の両辺を λ について偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \left(\lambda w + q - \frac{1}{p} \right) \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + w \sin^2 \theta \quad (10.32)$$

となる。 $\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}$ について解くと

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(x, \lambda) = \int_a^x dt w(t) \sin^2 \theta(t, \lambda) \exp \left(\int_t^x ds \left(\lambda w(s) + q(s) - \frac{1}{p(s)} \right) \sin 2\theta(s, \lambda) \right) \quad (10.33)$$

という表示を得る。 $w(t) > 0$ より $\sin \theta \equiv 0$ 、つまり $y \equiv 0$ でない限り ($y \neq 0$ となる解を探しているのであった) は $\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} > 0$ である。よって $\theta(x, \lambda)$ は λ について単調増加する。

λ は条件 (10.31) から決まる。

$$\theta(b, \lambda) = \theta_0 + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (10.34)$$

$$\theta_0 := \cot^{-1} \left(-\frac{\beta_1}{\beta_2} p(b) \right) \quad (0 < \theta_0 \leq \pi) \quad (10.35)$$

$\theta(b, \lambda)$ は λ について単調増加であったので、各整数 n に対して λ は (存在すれば) 一意に決まる (図 10.1)。よって固有値 λ は離散的に分布する。

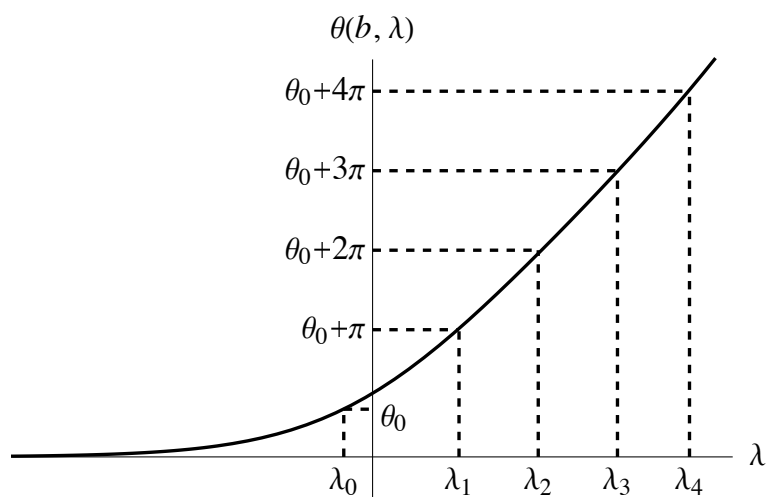


図 10.1: $\theta(b, \lambda)$ の振る舞いと固有値 λ_n の分布。 $\theta_0 = \cot^{-1}(-\frac{\beta_1}{\beta_2}p(b))$ ($0 < \theta_0 \leq \pi$)。

さらに $\theta(b, \lambda)$ は $\lambda \rightarrow \pm\infty$ の極限で

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(b, \lambda) = 0 \quad (10.36)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(b, \lambda) = +\infty \quad (10.37)$$

と振る舞うことがわかる (付録 D を参照)。よって固有値は可算無限個あり、下限が存在し上限が存在しないことがわかるので、固有値は $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ とラベル付けできて $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ であることが言える。

$\lambda = \lambda_n$ が決まれば境界条件 (10.30), (10.31) を満たす微分方程式 (10.26) の解 $\theta(x, \lambda_n)$ が一意に定まる。そこから (10.29) によって $r(x)$ も (定数倍の違いを除いて) 一意に定まるので $y_n(x) = r(x) \sin \theta(x, \lambda_n)$ も一意に決まる。 y_n の零点の個数は $\theta(a)/\pi$ と $\theta(b)/\pi$ の間にある整数の個数に等しかった。 $\theta(b, \lambda_n) = \theta_0 + n\pi$ ($0 < \theta_0 \leq \pi$) に注意すると、 $0 \leq \theta(a) < \pi$, $n\pi < \theta(b, \lambda_n) \leq (n+1)\pi$ であるのでその個数はちょうど n 個である。

10.4 量子力学との関係

スツルム・リウビル理論を量子力学の問題に応用してみよう。量子力学では、波動関数 $\psi(x)$ は以下のシュレディンガー方程式に従う。

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (10.38)$$

ここで \hbar はプランク定数、 m は粒子の質量、 $V(x)$ はポテンシャル、 E はエネルギーである。 $p(x) = \frac{\hbar^2}{2m}$, $q(x) = -V(x)$, $w(x) = 1$, $\lambda = E$ とおけばスツルム・リウビル型の微分方程式になっている。よって自己随伴演算子 $\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ の固有値問題と見なすことができる。

量子力学的粒子が有限区間 $[a, b]$ に閉じ込められている状況を考えよう。このとき波動関数が端でゼロになるという境界条件が課される。

$$\psi(a) = 0 \quad (10.39)$$

$$\psi(b) = 0 \quad (10.40)$$

これはスツルム・リウビル型の境界条件 (10.11), (10.12) で $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ としたものに对应する。

スツルム・リウビル理論の結果から以下のことが一般的にいえる。エネルギー固有値 E は離散的な値 ($E = E_n, n = 0, 1, 2, \dots$) をとり、最小固有値 E_0 が存在する。 E_0 に対応する固有状態 ψ_0 は、エネルギーが最小となる基底状態に対応する。 E_1 に対応する固有状態 ψ_1 は第一励起状態、固有状態 ψ_2 は第二励起状態、という具合である。無限個の励起状態が存在する。固有状態は縮退していない。さらに基底状態の波動関数は節 ($\psi(x) = 0$ となる点) を持たない。第 n 励起状態はちょうど n 個の節を持つ。

例 10.4. 次のような無限に高いポテンシャル壁に囲まれた場合を考えよう。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < \pi) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10.41)$$

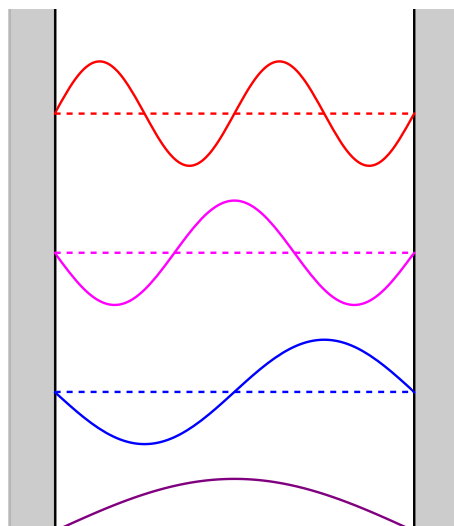


図 10.2: 無限に高いポテンシャル壁で囲まれたときの固有状態の波動関数。下から基底状態、第一励起状態、第二励起状態、… となっている。

シュレディンガー方程式の解は以下のように与えられる。

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10.42)$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{2m-1}{2}x & (n = 2m - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx & (n = 2m) \end{cases} \quad (10.43)$$

エネルギー固有値は離散的な値をとり、縮退はない。第 n 励起状態は n 個の節を持つ (図 10.2)。区間 $[-\pi, \pi]$ 上で境界条件 $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ を満たす関数は $\{\psi_n\}$ で展開できる。これはフーリエ級数展開に他ならない。

このように有限領域に閉じ込められた場合は離散的なエネルギースペクトルを持つ。区間を無限にすると必ずしもそうならない。例えば有限の深さの井戸型ポテンシャルの場合は、エネルギーが十分低ければ束縛状態 (波動関数の振幅が無限遠でゼロに近づく状態) が存在する可能性がありエネルギー固有値が離散化するが、エネルギーが高くなると散乱状態となりエネルギースペクトルは連続的になる。

問 10.1. [B] 以下の微分方程式を考えよう。

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (10.44)$$

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & (-1 < x < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10.45)$$

ただし $V_0 > 0, E < 0$ とする。最小の E の値を持つ解 (基底状態) を求めよ。次に小さい E (< 0) の値を持つ解 (第一励起状態) が存在するのはどのようなときか。

付録 A フーリエ級数の収束

第2章の定理 2.1 (フーリエ級数の各点収束) を証明する。ここでの議論は [1] に従った。

証明. 式 (2.11) の右辺の無限和を $n = N$ までの有限和で置き換えたものを

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{A.1})$$

とおく。 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = (f(x_+) + f(x_-))/2$ を示せばよい。(2.7), (2.8) を代入すると

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds f(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} ds f(s) (\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds f(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} ds f(s) \cos n(s-x) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで

$$D_N(s) := \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos ns \quad (\text{A.3})$$

と定義する。 $D_N(s)$ はディリクレ核とよばれる。これを用いると

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds f(s) D_N(s-x) \quad (\text{A.4})$$

と書き直せる。 $f(s)$ は周期 2π の周期関数だったので積分区間を x だけずらしても積分値は変わらない。

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} ds f(s) D_N(s-x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_x^{x+\pi} ds f(s) D_N(s-x) + \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^x ds f(s) D_N(s-x) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

二つに分けた項のうち、初項は

$$I_N(x) := \frac{1}{\pi} \int_x^{x+\pi} ds f(s) D_N(s-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} du f(x+u) D_N(u) \quad (u := s-x) \quad (\text{A.6})$$

第二項は

$$J_N(x) := \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^x ds f(s) D_N(s-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du f(x-u) D_N(u) \quad (u := x-s) \quad (\text{A.7})$$

と表せる。 $S_N(x) = I_N(x) + J_N(x)$ である。

まず $I_N(x)$ について見ていく。

$$\begin{aligned} I_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du (f(x+u) - f(x_+)) D_N(u) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du f(x_+) D_N(u) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du (f(x+u) - f(x_+)) D_N(u) + \frac{1}{2} f(x_+) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と変形する。ディリクレ核が

$$D_N(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (e^{inu} + e^{-inu}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(e^{iu} \frac{1 - e^{iNu}}{1 - e^{iu}} + e^{-iu} \frac{1 - e^{-iNu}}{1 - e^{-iu}} \right) = \frac{\sin(\frac{u}{2} + Nu)}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad (\text{A.9})$$

と表せることに注意すると、

$$\begin{aligned} I_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du \frac{f(x+u) - f(x_+)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \left(\frac{u}{2} + Nu \right) + \frac{1}{2} f(x_+) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du \frac{f(x+u) - f(x_+)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sin \frac{u}{2} \cos Nu \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi du \frac{f(x+u) - f(x_+)}{2 \sin \frac{u}{2}} \cos \frac{u}{2} \sin Nu + \frac{1}{2} f(x_+) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

と書ける。右微分 $f'_R(x)$ が存在することにより、 $\frac{f(x+u) - f(x_+)}{2 \sin \frac{u}{2}}$ は u の関数として $(0, \pi)$ において区分的に連続である。 $(0, \pi)$ で区分的に連続な関数 $G(u)$ について

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi du G(u) \cos Nu = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi du G(u) \sin Nu = 0 \quad (\text{A.12})$$

が成り立つ (補題 A.1 を参照) ことを使うと、 $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(x) = \frac{1}{2} f(x_+)$ が言えた。同様に $\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(x) = \frac{1}{2} f(x_-)$ も言える。 \square

補題 A.1. $(0, \pi)$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi dx f(x) \cos nx = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi dx f(x) \sin nx = 0 \quad (\text{A.14})$$

証明.

$$\tilde{a}_n := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx f(x) \cos nx \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{b}_n := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx f(x) \sin nx \quad (\text{A.16})$$

とおく。(2.7), (2.8) と少し定義が違うので注意。まず (A.13) を示す。

$$U_N(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n \cos nx \quad (\text{A.17})$$

とおいて以下の積分を評価する。

$$\int_0^\pi dx (f(x) - U_N(x))^2 = \int_0^\pi dx (f(x))^2 - 2 \int_0^\pi dx f(x) U_N(x) + \int_0^\pi dx (U_N(x))^2 \quad (\text{A.18})$$

\tilde{a}_n の定義 (A.15) と \cos の直交性 (2.3) より

$$\int_0^\pi dx (f(x) - U_N(x))^2 = \int_0^\pi dx (f(x))^2 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\tilde{a}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n^2 \right) \quad (\text{A.19})$$

が得られる。左辺は非負なので

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx (f(x))^2 \geq \frac{\tilde{a}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n^2 \quad (\text{A.20})$$

が言える (ベッセルの不等式)。右辺の級数は N について単調増加で有界なので $N \rightarrow \infty$ で収束する。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = 0$ 。

同様に

$$V_N(x) = \sum_{n=1}^N \tilde{b}_n \sin nx \quad (\text{A.21})$$

とおいて $\int_0^\pi dx (f(x) - V_N(x))^2$ を評価することで $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{b}_n = 0$ が示せる。 \square

付録 B 周期 2π のフーリエ級数で解を展開した 場合

Sec. 4.2 において、有限区間 $[-\pi, \pi]$ における熱伝導方程式を考えた。境界条件として $u(t, -\pi) = u(t, \pi) = 0$ を課したとき、解は周期 4π のフーリエ級数で与えられることを見た。区間 $[-\pi, \pi]$ で考えているのだから、周期 2π のフーリエ級数で解くことはできないのかと考えるのは自然である。ここでは、周期 2π のフーリエ級数で解を展開した場合にどうなるか (なぜうまくいかないのか) を見てみる。

まず解を周期 2π の周期関数だと思ってフーリエ級数展開しよう。

$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx) \quad (\text{B.1})$$

境界条件 $u(t, -\pi) = u(t, \pi) = 0$ から

$$\frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos n\pi = 0 \quad (\text{B.2})$$

が満たされる必要がある。すなわち

$$\frac{a_0(t)}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(t) \quad (\text{B.3})$$

である。これを (B.1) に代入すると

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t)(\cos nx - (-1)^n) + b_n(t) \sin nx) \quad (\text{B.4})$$

となる。熱伝導方程式 (4.1) に代入して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(t)(\cos nx - (-1)^n) + b'_n(t) \sin nx) = \kappa \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t)(-n^2) \cos nx + b_n(t)(-n^2) \sin nx) \quad (\text{B.5})$$

を得る。両辺のフーリエ級数を比較して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a'_n(t) = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$a'_n(t) = -\kappa n^2 a_n(t) \quad (\text{B.7})$$

$$b'_n(t) = -\kappa n^2 b_n(t) \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ。(B.7), (B.8) を解くと

$$a_n(t) = e^{-\kappa n^2 t} a_n(0) \quad (\text{B.9})$$

$$b_n(t) = e^{-\kappa n^2 t} b_n(0) \quad (\text{B.10})$$

となるので (B.6) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-\kappa n^2) e^{-\kappa n^2 t} a_n(0) = 0 \quad (\text{B.11})$$

が満たされる必要がある。これが 任意の t で成り立つためには $a_n(0) = 0$ ($n \geq 1$) となるしかない。(B.9) より $a_n(t) = 0$ である。よって解は

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin nx \quad (\text{B.12})$$

という形をとることになる。これは正しい解 (4.30) の一部しか含んでおらず、奇関数に限定されてしまっている。ここまでの議論のどこにギャップがあったのだろうか？

実は (B.5) で何気なく項別微分をしてしまったが、これが許されるためには条件がつく。一般にフーリエ級数が項別微分できるための条件として、以下の定理が知られている。

定理 B.1. 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ が以下を満たすとする。

- (i) $f(x)$ は $[-\pi, \pi]$ で連続
- (ii) $f(-\pi) = f(\pi)$
- (iii) $f'(x)$ は $(-\pi, \pi)$ で区分的に連続

このとき $f'(x)$ が連続となる各点 x において $f(x)$ のフーリエ級数は項別微分できる。

証明は西森 [1] を参照。

熱伝導方程式の場合は x について 2 回微分するので、2 回項別微分できるためには $f'(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で連続でかつ、 $f'(-\pi) = f'(\pi)$ である必要がある。任意の初期条件に対して熱伝導方程式の解を周期 2π の周期関数だと思って解こうとすると、一般に微分が $x = \pm\pi$ で不連続になってしまう (図 B.1 参照) ので項別微分ができない (!) ということになってしまう¹。

この問題を回避するためには、微分が連続になるように解を $[-\pi, \pi]$ の外に延長してあげればよくて、図 B.2 のように周期 4π の周期関数だと思ってフーリエ級数展開することで項別微分ができるようになる (式 (4.33), (4.34) を参照)。このように境界条件に応じて周期を適切に選ぶ必要がある。

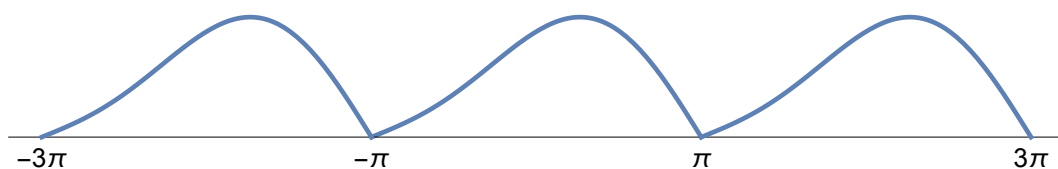


図 B.1: 周期 2π の周期関数として解を延長した場合。微分が不連続になっている。

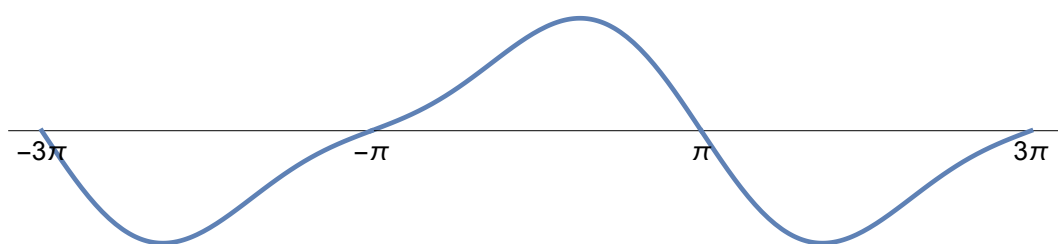


図 B.2: 周期 4π の周期関数として解を延長した場合。微分が連続になるようにできる。

¹周期 2π の周期関数で考えた場合、そもそも $f(x)$ が $x = \pm\pi$ で微分できないので $f'(\pm\pi)$ が定義されないという問題もある。

付録 C 鞍点法

$f(z), g(z)$ を正則関数として、次のような経路 C に沿った複素積分

$$I(s) = \int_C dz e^{sf(z)} g(z) \quad (\text{C.1})$$

が与えられたとき、 $I(s)$ の $s \rightarrow \infty$ での漸近形を求める方法として鞍点法 (または最急降下法) を使うことができる。アイデアとしては、被積分関数の指数関数部分 $e^{sf(z)}$ の肩に s があるので $s \rightarrow \infty$ とすると指数関数は z に関して激しく変化する。 C をうまく変形して経路上で $e^{sf(z)}$ がある点のまわりで鋭いピークを持つようにすれば、積分の寄与はその点のまわりに局在化し評価できるようになる。

どのようにしてそのような経路を見つけるかという、まず $f'(z) = 0$ となる点 (鞍点) を求める。そのような点は複数個あることもある。鞍点 (の一つ) を $z = z_0$ として、鞍点を通るように積分経路 C を連続的に変形する。このとき特異点や分岐線を横切らないようにする。 $f(z)$ は z_0 のまわりで次のように展開できる。

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0) (z - z_0)^2 + \dots \quad (\text{C.2})$$

$z - z_0 = r e^{i\theta}$ 、 $f''(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}$ とおくと指数関数部分は

$$e^{sf(z)} = e^{sf(z_0) + \frac{s}{2} r_0 r^2 e^{i(2\theta + \theta_0)} + \dots} \quad (\text{C.3})$$

となる。 $2\theta + \theta_0 = \pm\pi$ となるように z_0 近傍で経路 C を変形すれば、被積分関数の寄与は最もはやく減少するようになる。一方、 $2\theta + \theta_0 = 0, 2\pi$ となる方向を選ぶと寄与が最もはやく増大し、寄与の大きさは z_0 のまわりで馬の鞍のような形になる (図 C.1)。

このようにして経路 C を変形すると積分の寄与は z_0 付近に局在し、次のようにガウス

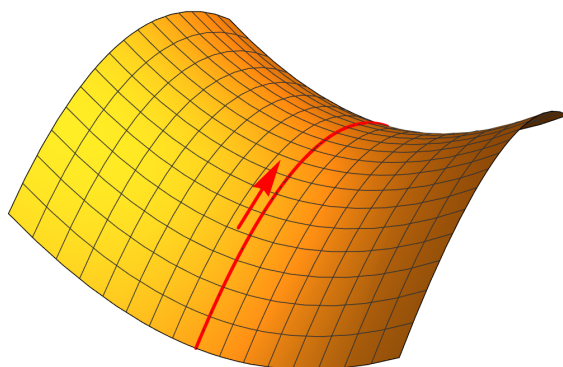


図 C.1: 鞍点のまわりでの積分の寄与の大きさと最急降下線。

積分で評価することができる。

$$\begin{aligned}
 I(s) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{i\theta} e^{sf(z_0) - \frac{s}{2} r_0 r^2} g(z_0) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\theta}}{\sqrt{s|f''(z_0)|}} \quad (s \rightarrow \infty)
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

鞍点が複数ある場合は、個々の鞍点の寄与を足し合わせればよい。

このようにして得られた経路は最急降下線とよばれる。鞍点法を使うときは鞍点の近傍の情報だけで十分だが、鞍点から離れたところまで最急降下線を求めたい場合は次のようにする。 $f(z)$ を実部と虚部に分けて $f(z) = u(z) + iv(z)$ と書くと $\nabla|e^{sf(z)}| \propto \nabla u(z)$ より $|e^{sf(z)}|$ が最も急に変化する方向は $\nabla u(z)$ である。一方、 $f(z)$ は正則関数だったのでコーシー・リーマンの関係式より ($z = x + iy$ として)

$$(\nabla u(z)) \cdot (\nabla v(z)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{C.5}$$

が成り立つ。よって $\nabla u(z)$ は $\nabla v(z)$ と垂直な方向、すなわち $v(z)$ が一定になる方向である。そこで積分経路 C を $v(z) = \text{const.}$ となるようにとれば最急降下線 (もしくは最急上昇線) になる。

付録 D スツルム・リウビル理論の補足

第 10 章でスツルム・リウビル理論を見たが、式 (10.36), (10.37) を示すことを後回しにしていたのでここで示しておく。ここでの議論は [7] に従った。

まず $\theta(x)$ は微分方程式 (10.26) に従うことを思い出す。

$$\theta'(x) = \frac{1}{p(x)} \cos^2 \theta(x) + (\lambda w(x) + q(x)) \sin^2 \theta(x) \quad (\text{D.1})$$

これを一般化した微分方程式について以下の比較定理が成り立つ。

定理 D.1. $\theta(x)$ と $\bar{\theta}(x)$ が次のような微分方程式にそれぞれ従うとする。

$$\theta'(x) = f(x) \cos^2 \theta(x) + g(x) \sin^2 \theta(x) \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{\theta}'(x) = \bar{f}(x) \cos^2 \bar{\theta}(x) + \bar{g}(x) \sin^2 \bar{\theta}(x) \quad (\text{D.3})$$

ただし $f(x) \geq \bar{f}(x)$, $g(x) \geq \bar{g}(x)$, $\theta(a) = \bar{\theta}(a)$ とする。このとき、

$$\theta(x) \geq \bar{\theta}(x) \quad (x \geq a) \quad (\text{D.4})$$

が成り立つ。

証明. $\theta(x)$ と $\bar{\theta}(x)$ をつなぐような関数 $\theta_\nu(x)$ ($0 \leq \nu \leq 1$) を考える。 $\theta_\nu(x)$ は次の微分方程式を満たすとする。

$$\theta'_\nu = f_\nu(x) \cos^2 \theta_\nu + g_\nu(x) \sin^2 \theta_\nu \quad (\text{D.5})$$

ここで

$$f_\nu(x) := \bar{f}(x) + \nu(f(x) - \bar{f}(x)) \quad (\text{D.6})$$

$$g_\nu(x) := \bar{g}(x) + \nu(g(x) - \bar{g}(x)) \quad (\text{D.7})$$

である。初期条件は $\theta_\nu(a) = \theta(a) (= \bar{\theta}(a))$ とする。 $\theta_0(x) = \bar{\theta}(x)$, $\theta_1(x) = \theta(x)$ が成り立っている。(D.5) の両辺を ν で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \nu} &= (g_\nu(x) - f_\nu(x)) \sin 2\theta_\nu \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \nu} + (f(x) - \bar{f}(x)) \cos^2 \theta_\nu \\ &\quad + (g(x) - \bar{g}(x)) \sin^2 \theta_\nu \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

を得る。この式を $\frac{\partial \theta_\nu}{\partial \nu}$ についての微分方程式とみて解くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \nu} &= \int_a^x dt ((f(t) - \bar{f}(t)) \cos^2 \theta_\nu(t) + (g(t) - \bar{g}(t)) \sin^2 \theta_\nu(t)) \\ &\quad \times \exp \left(\int_t^x ds (g_\nu(s) - f_\nu(s)) \sin 2\theta_\nu(s) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

という表示を得る。 $\frac{\partial \theta_\nu(a)}{\partial \nu} = 0$ であることに注意。ここから $\frac{\partial \theta_\nu}{\partial \nu} \geq 0$ ($x \geq a$) であることがわかる。特に $\theta_1(x) \geq \theta_0(x)$ 、すなわち $\theta(x) \geq \bar{\theta}(x)$ ($x \geq a$) である。□

比較定理 D.1 を使うと (10.36), (10.37) を示すことができる。

定理 D.2.

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(b, \lambda) = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta(b, \lambda) = +\infty \quad (\text{D.11})$$

証明. まず $\lambda \rightarrow +\infty$ のほうを考える。 $p(x)^{-1} \geq p_0^{-1}$, $q(x) \geq q_0$, $w(x) \geq w_0$ ($a \leq x \leq b$) とする定数 p_0, q_0, w_0 (ただし $p_0, w_0 > 0$) を用いて、 $\lambda > 0$ のとき $\theta_0(x)$ についての

$$\theta'_0 = \frac{1}{p_0} \cos^2 \theta_0 + (\lambda w_0 + q_0) \sin^2 \theta_0 \quad (\text{D.12})$$

という微分方程式を考えよう。初期条件が等しくなるように $\theta(a) = \theta_0(a)$ ととったとき、比較定理 D.1 より

$$\theta(x) \geq \theta_0(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (\text{D.13})$$

が成り立つ。よって $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta_0(b) = +\infty$ がいえれば十分。

$\theta_0(x)$ は、微分方程式 (10.1) で $p(x), q(x), w(x)$ を定数 p_0, q_0, w_0 で置き換えた

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\lambda w_0 + q_0}{p_0} y \quad (\text{D.14})$$

の解を $y(x) = r_0(x) \sin \theta_0(x)$, $p_0 y'(x) = r_0(x) \cos \theta_0(x)$ とおいたものに対応する。 $\lambda \rightarrow +\infty$ のとき (D.14) の解は三角関数 $y = C \sin(\omega x - \alpha)$ で与えられる。ただし $\omega = \sqrt{(\lambda w_0 + q_0)/p_0}$ である。 $\lambda \rightarrow +\infty$ とすると ω が増大していき解は区間 $[a, b]$ 内で激しく振動する。特に解の零点の個数は $\sqrt{\lambda}$ に比例して増加するが、零点の個数は $\theta_0(a, \lambda)/\pi$ と $\theta_0(b, \lambda)/\pi$ の間の整数の個数に等しかった。よって $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \theta_0(b) = +\infty$ である。

次に $\lambda \rightarrow -\infty$ のほうを考える。今度は $p_0^{-1} \leq p(x)^{-1} \leq p_1^{-1}$, $q_0 \leq q(x) \leq q_1$, $w_0 \leq w(x) \leq w_1$ ($a \leq x \leq b$) となる定数 $p_0, p_1, q_0, q_1, w_0, w_1$ (ただし $p_0, p_1, w_0, w_1 > 0$) を用いて、 $\lambda < 0$ のとき $\theta_0(x), \theta_1(x)$ についての

$$\theta_0' = \frac{1}{p_0} \cos^2 \theta_0 + (\lambda w_1 + q_0) \sin^2 \theta_0 \quad (\text{D.15})$$

$$\theta_1' = \frac{1}{p_1} \cos^2 \theta_1 + (\lambda w_0 + q_1) \sin^2 \theta_1 \quad (\text{D.16})$$

という微分方程式を考えよう。初期条件が等しくなるように $\theta(a) = \theta_0(a) = \theta_1(a)$ ととったとき、比較定理 D.1 より

$$\theta_0(x) \leq \theta(x) \leq \theta_1(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (\text{D.17})$$

が成り立つ。よって $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta_0(b) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta_1(b) = 0$ がいえれば十分。

$\theta_0(x)$ は、微分方程式 (10.1) で $p(x), q(x), w(x)$ を定数 p_0, q_0, w_1 で置き換えた

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\lambda w_1 + q_0}{p_0} y \quad (\text{D.18})$$

の解を $y(x) = r_0(x) \sin \theta_0(x)$, $p_0 y'(x) = r_0(x) \cos \theta_0(x)$ とおいたものに対応する。 $\lambda \rightarrow -\infty$ とすると (D.18) の解は指数関数 $y = Ae^{\kappa(x-a)} + Be^{-\kappa(x-a)}$ ($A, B \neq 0$) で与えられる。ただし $\kappa = \sqrt{(|\lambda|w_1 + q_0)/p_0}$ である。 $\lambda \rightarrow -\infty$ とすると κ が増大していき解は急速に指数増大する。 $x > a$ で $y \approx Ae^{\kappa(x-a)}$ となり、解は区間 $[a, b]$ で零点を持たない。したがって

$0 < \theta_0(b) < \pi$ である。さらに $y'(b)/y(b) \approx \kappa \rightarrow +\infty$ であり、 $y'/y = p_0^{-1} \cot \theta$ であることを思い出すと、 $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \cot \theta_0(b) = +\infty$ 、すなわち $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta_0(b) = 0$ である。 $\theta_1(x)$ についても全く同様の議論により $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta_1(b) = 0$ であることがわかる。 \square

参考文献

- [1] 西森秀稔: 『物理数学 II』 (丸善書店)
- [2] 侯野博、神保道夫: 『岩波講座 現代数学への入門: 熱・波動と微分方程式』 (岩波書店)
- [3] 塚田捷: 『物理数学 II』 (朝倉書店)
- [4] G. アルフケン、H. ウェーバー (権平他訳): 『関数論と微分方程式』 (講談社)
- [5] G. アルフケン、H. ウェーバー (権平他訳): 『特殊関数』 (講談社)
- [6] 犬井鉄郎: 『特殊関数』 (岩波書店)
- [7] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, “Special Functions of Mathematical Physics” (Springer)
- [8] S. Bochner, “Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme”, Math. Z. **29**, 730 (1929)
- [9] 新井朝雄: 『ヒルベルト空間と量子力学』 (共立出版)